



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

**Институт естественных наук
и математики**

**В. В. СТРУЖАНОВ
Н. В. БУРМАШЕВА**

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ: ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

В. В. Стружанов, Н. В. Бурмашева

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ: ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано
методическим советом Уральского федерального университета
в качестве учебного пособия для студентов вуза,
обучающихся по направлению подготовки
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2019

УДК 531.36 (075.8)
С 871

Рецензенты:

лаборатория прикладной механики Института машиноведения УрО РАН
(заведующий лабораторией кандидат технических наук, доцент Л. Ф. Спевак);
В. П. Швейкин, доктор технических наук, заместитель директора по научной
работе Института машиноведения УрО РАН

Стружанов, В. В.

С871 Теория упругости: основные положения : учеб. пособие /
В. В. Стружанов, Н. В. Бурмашева ; М-во науки и высш. обра-
зования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург :
Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 204 с.

ISBN 978-5-7996-2541-2

В пособии в сжатом виде приведены сведения о базовых понятиях, моделях и основных уравнениях теории упругости, позволяющие получить представление о данном разделе механики деформируемого твердого тела.

Для студентов, изучающих дисциплину «Математические модели механики сплошных сред», раздел «Механика деформируемого твердого тела».

УДК 531.36 (075.8)

Предисловие

Пособие представляет собой краткое изложение курса основ теории упругости «Математические модели механики сплошных сред», который читается студентам бакалавриата Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета, обучающимся по направлению 01.03.03 «Механика и математическое моделирование».

Пособие разбито на главы, в которых рассматриваются основные гипотезы и принципы механики деформируемого твердого тела и базовые понятия теории упругости: упругая энергия и упругие потенциалы, принцип напряжений и исследование напряженного состояния в точке, понятие вектора перемещений и тензора деформаций, совместность деформаций, определяющие соотношения и краевые задачи (в разных системах координат), энергетические принципы и общие методы решения основных уравнений теории упругости и др.

При составлении пособия использованы методические разработки по механике деформируемого твердого тела, составленные в прошлые годы на кафедре теоретической механики Уральского государственного университета им. А. М. Горького.

1. Основные понятия

1.1. Предмет механики деформируемого твердого тела

Механика деформируемого твердого тела, будучи одной из глав общей механики, изучает *движение и равновесие твердых тел*. Различие между твердыми телами и жидкостями представляется интуитивно ясным, однако отчетливую границу зачастую провести бывает трудно. Например, при прокатке раскаленного металлического листа между валками прокатного стана металл находится в состоянии пластического течения и термин «твердое тело» по отношению к нему носит довольно условный характер. Поэтому дать определение того, что называется твердым телом, затруднительно, да, пожалуй, и невозможно. Поэтому термин «механика твердого тела» относится скорее к *методу исследования*, чем к его *объекту*.

Развитие механики твердого тела в значительной степени связано с практическими целями — расчетами элементов конструкций и деталей машин на *прочность*, под нарушением которой обычно понимают достижение такого состояния, когда изменяются конструктивные свойства изделия, когда оно становится непригодным к эксплуатации. Начальные сведения о способах расчета на прочность излагаются в учебной дисциплине «Соппротивление материалов». Более точные и строгие методы, позволяющие производить подобного рода расчеты, изучаются специальными научными дисциплинами — теорией упругости, теорией пластичности, теорией ползучести, механикой разрушения и т. д. Все они являются ветвями или главами механики деформируемого твердого тела.

Так как свойства тел весьма разнообразны, то механика подменяет реальные тела некоторыми идеализированными объектами, *механическими моделями*. Механические теории носят, как правило, *феноменологический характер*. Это значит, что в основу их полагаются факты опытного происхождения, причем факты, добытые в результате так называемого макроэксперимента, в ходе которого измеряются силы и перемещения. Используя опытные данные, поведение материала при деформировании описывают с помощью уравнений, которые называются *определяющими уравнениями (соотношениями)*.

Другую группу уравнений представляют системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие деформирование твердых тел, построение которых является чисто геометрической проблемой и совершенно не зависит от поведения материала. Решение этих уравнений связано с удовлетворением условий равновесия, неразрывности перемещений и граничных условий.

Совокупность всех указанных уравнений представляет собой *математическую модель деформируемого твердого тела*. Вообще говоря, это некоторая приближенная теория деформирования, причем подразумевается, что может быть несколько вариантов теории, обладающих разными уровнями погрешности.

Основная задача при исследовании различных явлений заключается в построении математической модели. После этого свойства модели (существование и единственность решения, методы решения и т. д.) исследуются чисто математическими методами. В связи с этим возникает вопрос: как следует относиться к математически строгим решениям приближенных, по существу, уравнений? Следует ли к ним стремиться, коль скоро их точность превосходит точность модели?

Ответ на эти вопросы может быть только положительным. Во-первых, получить математически строгое решение заведомо приближенных уравнений, основывающихся иногда на весьма грубых физических допущениях, не труднее, чем приближенное; во-вторых, точные решения отдельных задач, соответствующих некоторой конкретной модели, обычно проливают свет на характерные особенности модели в целом, являясь своего рода эталонами, способствующими построению приближенных решений более сложных задач этого же класса.

Наконец, отметим, что при построении модели допустимы и некоторые логические противоречия, если обусловленные ими ошибки в расчетах не выходят за рамки погрешности, следующей из принятых в модели допущений физического характера.

1.2. Основные гипотезы и принципы механики деформируемого твердого тела

1. Одним из основных принципов механики деформируемого твердого тела является *гипотеза сплошности*. По этой гипотезе тело, непрерывное до деформации, остается непрерывным и после деформации, непрерывным остается любой объем тела, в том числе и элементарный. То есть среда является сплошной, если любой выделенный из нее объем имеет массу. В связи с этим перемещения точек считаются непрерывными функциями координат.

Таким образом, не учитывается дискретная, т. е. атомистическая, структура вещества. Очевидно, что это предположение противоречит действительности, так как реальные материалы всегда обладают характерной структурой, а также дефектами в виде пустот, трещин и т. п.

Отказ от дискретной схемы строения вещества и переход к гипотезе о сплошной, т. е. непрерывной, среде (механика континуума) обусловлены исключительными математическими трудностями, связанными с дискретной схемой, а также отсутствием многих физических постоянных, без которых теоретическое исследование невозможно. Континуальное рассмотрение позволяет на полную мощность использовать хорошо развитый математический аппарат непрерывных функций.

2. Следующим принципом механики твердого тела является *принцип макроскопической определенности*, согласно которому малой окрестности точки сплошной среды может быть однозначно поставлено в соответствие тело конечных размеров — специальный образец. Это дает возможность экспериментально проверять результаты теоретических исследований, а также приписывать материальной точке механические и физические свойства целого образца.

3. Важной гипотезой, служащей для математического описания действия внутренних сил в деформируемом теле, является *принцип напряжений Эйлера и Коши*: в каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела, имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и характер распределенных по поверхности нагрузок.

4. Отсюда вытекает, что напряженное состояние в точке деформируемого тела определяется внутренними силами и деформацией в этой точке и не зависит от напряженно-деформированного состояния в соседних точках. Это означает, что градиент напряжений не влияет на прочность материала в данной точке (*принцип автономной прочности*).

5. Следующей гипотезой является *гипотеза о естественном ненапряженном состоянии тела*. Согласно ей

существующие до приложения поверхностных нагрузок начальные напряжения в теле, характер и величина которых зависят от истории возникновения тела, полагаются равными нулю. Отсюда определяемые напряжения не являются фактическими напряжениями в теле, а составляют лишь прирост напряжений в рассматриваемых точках.

Отметим, что пренебрежение в технических расчетах начальными напряжениями, так же как и неучет отступлений в структуре материалов от идеальной сплошности, частично компенсируется тем, что установление основных механических характеристик материала и связанное с ними определение нормы допускаемых напряжений экспериментально выполняются также без учета начальных напряжений и неравномерности заполнения объема испытуемого образца (макроскопические опыты).

Заметим, что существуют специальные задачи по определению собственных (начальных, остаточных) напряжений. Хотя вся история, конечно же, не прослеживается.

6. Большое количество задач решается с использованием принципа локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок — *принципа Сен-Венана*. Согласно этому принципу, если в какой-либо малой части тела приложена уравновешенная система сил, то она вызывает в теле напряжения, очень быстро убывающие по мере удаления от этой точки (экспоненциальный характер затухания напряжений). Поэтому возможна локальная замена одной уравновешенной системы сил на другую. Это позволяет заменять одни нагрузки на другие (например, сосредоточенные на распределенные).

Принцип локальности можно выразить иначе: в точках твердого тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок.

Для изучения закона распределения в области, лежащей в непосредственной близости к месту приложения сосредоточенных или почти сосредоточенных нагрузок, составляют особые задачи теории упругости — контактные задачи.

7. Часто используется предположение об изотропности материала, под которой понимается, что физикомеханические свойства одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки материала, и любую плоскость, проходящую через частицу, можно рассматривать как плоскость симметрии для нее. Другими словами, свойства образцов, вырезанных из материалов, не зависят от их ориентации. Полагая, что свойства частиц материала не зависят от их местоположения, получаем *понятие однородного изотропного тела*.

Очевидно, что для микрообъема (например, кристалла стали и т. п.) свойства не одинаковы по различным направлениям. Однако беспорядочное расположение микрокристаллов создает так называемую квазиизотропию материала. Таким образом, применительно к объему, включающему большое количество частиц (для макрообъема), во всех направлениях материал обладает практически одинаковыми свойствами в смысле среднего статистического эффекта, создаваемого деформацией отдельных кристаллов. Поэтому можно считать, что все величины, характеризующие напряжения и деформации в механике деформируемого тела, являются статистически средними действительного их распределения в конгломерате зерен металлов и подобных им технических материалов.

8. Наконец, во многих разделах механики деформируемого твердого тела принимается, что *перемещения точек тела малы по сравнению с линейными размерами тела*. Отсюда относительные удлинения и сдвиги, а также углы

поворота пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Кроме того, квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с относительными удлинениями и сдвигами. Данное предложение означает, что рассматриваются существенно трехмерные тела, изменением граничных поверхностей которых пренебрегают, и существует возможность линеаризации уравнений, определяющих геометрические свойства деформируемого тела.

1.3. Различные ветви механики деформируемого твердого тела

Рассмотрим комплекс научных дисциплин, применяемых для расчета сооружений и машин на прочность. Все они образуют раздел науки, называемый *реологией* (наука о течении вещества). Реология устанавливает общие законы образования и развития во времени деформации любого вещества от различных причин в различных термодинамических и физико-механических условиях.

При этом вещество может быть именно любым: твердым, жидким, пластичным, вязким и т. п. Причины для деформации также могут быть самые разные: статические или динамические нагрузки, изменение в параметрах, характеризующих как внешнюю среду (температурное поле), так и само вещество, и т. д. Деформации происходят в разное время: вслед за приложением нагрузки или продолжительное время спустя, когда полностью или частично удалены внешние причины; как в состоянии равновесия, так и в случае движения, и т. д.

Таким образом, реология позволяет определить, каковы напряжения и деформации в данной точке тела в определенный момент времени при известных параметрах внешнего воздействия и его истории в прошлом.

Представляется целесообразным отступить от общей формулировки задач реологии, т. е. сузить задачи, схематизировать изучаемые процессы и т. д. В реологии получены пока немногие, но важные результаты: сделаны попытки установить взаимно однозначные зависимости между напряжениями и деформациями для системы классических тел (упругое, идеально пластическое, идеально вязкое и т. п.). При этом важно установить границы для практического применения той или иной идеализированной схемы, того или иного комплекса гипотез.

Теория упругости. Одной из идеализаций твердого тела является принимаемое свойство идеальной упругости. Идеальная упругость есть способность тела, получившего деформацию, после устранения причин, ее вызвавших, полностью восстановить свою форму. Работа, затраченная внешними силами на перемещениях точек их приложения, принимается телом в обратимой форме — в форме накопления в нем упругой энергии, равной по величине работе внешних сил.

Таким образом, идеально упругое тело выполняет первый закон термодинамики о сохранении энергии в изолированной системе.

Способность идеально упругого тела не оставлять на себе никакого следа от прошлых нагружений приводит к тому, что такое тело всегда имеет форму, зависящую лишь от тех нагрузок, которые в данный момент действуют на тело, и не зависящую от того, как эти нагрузки росли.

Очевидно, что при этом отпадают вопросы влияния «наследственности» (т. е. влияние на деформацию в данное мгновение, кроме действующих сил, также и тех нагрузок, что когда-то оказывали влияние на напряжения и деформации), влияния последействия (временного отставания деформаций от изменения нагрузки), релакса-

ции (непрерывного спадания напряжений при постоянной деформации) и от других временных факторов.

Упругое состояние тела характеризуется тем, что для каждой температуры тела независимо от времени существует взаимнооднозначная зависимость между напряжениями и деформациями.

Все материалы в известной степени обладают свойством упругости, если внешние силы, вызывающие деформацию элемента конструкции, не превосходят определенной границы.

Теорию упругости обычно считают разделом математической физики, но ее можно рассматривать и как ветвь реологии, самую простую, но вместе с тем и основную.

Итак, теория упругости изучает действие сил на упругие тела и определяет возникающие при этом напряжения и деформации как в состоянии равновесия, так и в состоянии движения.

Между теорией упругости и сопротивлением материалов имеется принципиальное различие, заключающееся в исходных предпосылках, в методах решения задач и в диапазоне последних.

Сопромат не может решать задачи на отыскание напряженно-деформированного состояния тела, если его форма отличается от обычного стержня. Для произвольных тел такие задачи можно решать только с позиций теории упругости.

Цель теории упругости — найти по возможности точное решение поставленной задачи, хотя это не исключает применения различных приближенных методов решения.

Следует, однако, заметить, что точное решение многих задач методами теории упругости вызывает чрезвычайные сложности чисто математического порядка.

Теорию упругости можно разделить на математиче-

скую и прикладную теорию. Математическая теория упругости не использует никаких деформационных гипотез, а получаемые уравнения решаются либо точными методами, либо приближенными методами, которые позволяют безгранично увеличивать степень приближения к точному решению. Поэтому можно считать результаты, получаемые при решении задач математической теории упругости, эталоном для оценки точности различных приближенных теорий и методов решения исходных задач.

Прикладная теория упругости отличается от математической тем, что для решения задач применяются дополнительные гипотезы деформационного характера (гипотеза плоских сечений для стержней, прямых нормалей для пластин и оболочек и т. п.) и некоторые другие гипотезы относительно характера перемещений, что позволяет при решении многих задач исходить не из полной системы уравнений теории упругости. При решении задач прикладной теории упругости наряду с точными методами могут применяться и сугубо приближенные. Между прикладной теорией упругости, тесно связанной с запросами практики, и сопротивлением материалов нет четкой границы.

Теория пластичности. При превышении внешними силами некоторого предела после снятия нагрузки вызванные ими деформации не исчезают, а частично сохраняются. Эти деформации называют *пластическими*.

Величина пластической деформации зависит не только от конечной величины действующих сил, но также и от порядка их приложения. Вообще говоря, она зависит также от скорости нагружения и от времени пребывания тела под нагрузкой.

При пластическом состоянии в каждый данный момент времени и для данной температуры зависимость между напряжениями и деформациями становится однозначной,

только если известны все предшествующие напряженные и деформированные состояния материала и соответствующие значения температуры.

Наука, изучающая общие законы образования пластических деформаций и возникающих на всех стадиях пластического деформирования напряжений, называется теорией пластичности.

Теорию пластичности также можно разделить на математическую теорию пластичности и прикладную теорию пластичности. Математическая теория пытается строить строгие уравнения и находить их точные решения. Прикладная теория разрабатывает упрощенные методы расчета путем введения дополнительных гипотез геометрического (например, закон плоскости, известный из курса сопромата) и физического (например, наделение тела свойствами идеальной пластичности) характера. Простейшие задачи теории пластических деформаций, обычно изучаемые в курсе сопротивления материалов, характерны для такого прикладного направления.

Теория ползучести. У полимерных материалов, а также у металлов при повышенной температуре при постоянно действующей нагрузке определенной величины, деформации могут развиваться (подрастать) во времени. Возникающие в данном процессе деформации называют деформациями ползучести, а само явление — *ползучестью*.

После мгновенного снятия нагрузки упругая деформация исчезнет, а накопленная деформация ползучести не исчезнет. Однако она может уменьшаться со временем, стремясь к нулю. Этот процесс называется *последствием*.

У реальных материалов свойства ползучести и последствия обычно существуют одновременно. Последствие, т. е. запаздывающая упругость, характерна для вы-

сокополимеров. Однако если уровень напряжений достаточно высок, не вся деформация, накопленная в результате выдержки при постоянной температуре, возвращается после разгрузки. С другой стороны, если температура не слишком велика, некоторый возврат, т. е. некоторое уменьшение со временем оставшейся после разгрузки деформации, наблюдается и у металлов.

Возможен еще случай, когда после нагружения тела фиксируется деформация. Тогда со временем напряжения, возникшие в начальный момент, могут уменьшаться. Изменение напряжений при постоянной деформации называется *релаксацией*.

Ветвь механики деформируемого твердого тела, изучающая описанные явления (последствие, релаксацию, ползучесть), называется *теорией ползучести*.

Приведенная градация — это градация разделов механики деформированного твердого тела по свойствам материала. Естественно, она не ограничивается указанными выше разделами, так как свойства материалов весьма разнообразны. Например, существуют материалы, свойства которых зависят от направления приложения внешних сил. Такие материалы называются анизотропными, а соответствующая ветвь механики деформируемого твердого тела — механикой анизотропных материалов. Отметим, что и этот раздел может делиться на части, так как анизотропные материалы могут быть и упругими, и пластичными, и вязкими.

Существуют еще ветви механики деформируемого твердого тела, связанные с геометрией тела, например, механика разрушения или механика трещин, механика композиционных материалов, в которой свойства материала зависят от расположения армирующих волокон и связующего материала, и т. п.

2. Одномерные механико-математические модели материалов

2.1. Растяжение и сжатие стержней

Для выяснения основных идей механики деформируемого твердого тела начнем с простейших задач, решение которых основывается на непосредственном использовании опытных данных и требует лишь элементарных соображений.

Растяжение или сжатие с достаточно хорошей степенью точности реализуются в стержнях и стержневых системах. *Стержнем* называется цилиндрическое тело, поперечный размер которого мал по сравнению с размером в направлении образующей. Под поперечным размером будем понимать расстояние между двумя касательными, параллельными к контуру, например, h или h' (рис. 1). От-

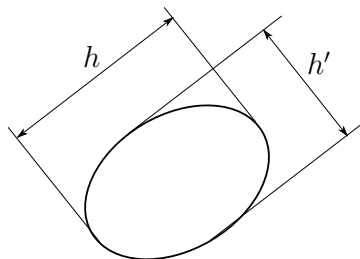


Рис. 1

ношение $h/l \ll 1$ (l — длина стержня) — величина, представляющая малый параметр, необходимый для оценки степени точности теории. Предполагается, что $h/h' \sim 1$, т. е. h и h' одного порядка для всех пар касательных.

Стержни встречаются как основные элементы большинства инженерных сооружений (например, мостовая ферма). Все узлы соединения стержней снабжены шарнирами, и концы стержней могут поворачиваться без трения, а также внешние силы приложены только в узлах, все стержни будут находиться в состоянии растяжения или сжатия.

Будем говорить, что стержень растягивается, если к торцам его приложены силы, статически эквивалентные одной силе, действующей по оси стержня. *Ось стержня* будем называть прямой, проходящую через центры его поперечных сечений.

Нагрузка прикладывается к концу стержня каким-то совершенно определенным реальным образом. На рис. 2 схематически изображены некоторые из возможных способов передачи нагрузки: а) сила представляет собой рав-

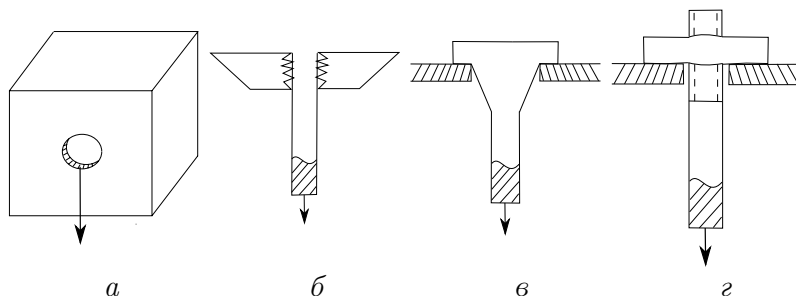


Рис. 2. Возможные способы передачи нагрузки

нодействующую давления со стороны заклепки на стенки отверстия, причем точное распределение этого давления неизвестно;

б, в) закрепление образцов в захватах машины для испытания на растяжение — образец либо зажимается клиновидными губками с насечкой, либо имеет головку;

г) конец тяги снабжен винтовой нарезкой, на которую наворачтывается гайка, опирающаяся на плоскость плиты, в которой просверлено отверстие для тяги (усилие передается от гайки к тяге, распределяясь по винтам нарезки).

Подобных конкретных способов передачи растягивающего усилия много. Однако при расчете стержней не считаются с индивидуальными особенностями, зависящими от способа приложения нагрузки, а принимают во внимание только равнодействующие сил, приложенных к каждому из концов стержня. Это делается на основании принципа Сен-Венана: способ приложения силы к торцу стержня сказывается лишь на расстоянии от торца порядка поперечного размера.

Таким образом, на расстоянии h распределение нормальных напряжений по сечению будет практически равномерным, следовательно, оно будет равномерным во всех более удаленных сечениях. Но равномерному распределению напряжений соответствует равномерное удлинение, следовательно, первоначально плоские поперечные сечения останутся плоскими и параллельными, они только раздвинутся при растяжении и сблизятся при сжатии. Этот фундаментальный вывод носит название *закона плоских сечений*. И данный закон иногда составляет основу всей теории.

Все изложенное относится и к сжатию, которое формально отличается от растяжения направлением приложенной силы и, соответственно, знаком напряжения. Фактическая разница между сжатием и растяжением гораздо глубже, так как при сжатии может возникнуть новое явление — потеря устойчивости.

2.2. Напряжения и деформации при растяжении–сжатии

Рассекаем растягиваемый стержень плоскостью mn (рис. 3), перпендикулярной к оси стержня (не слишком близко к концу), и отбрасываем верхнюю часть. Действие верхней части на нижнюю можно заменить равномерно распределенными по сечению mn нормальными напряжениями σ (принцип напряжений Коши). Составим уравнение равновесия нижней части:

$$\sigma F - P = 0 \quad \text{или} \quad \sigma = P/F.$$

Здесь F — площадь поперечного сечения.

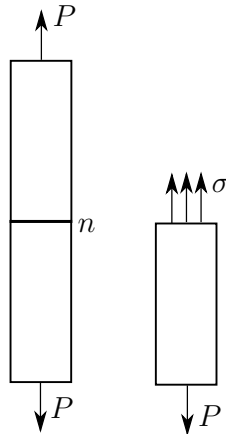


Рис. 3

Сделаем одно замечание, относящееся к знакам. Знак внешней силы устанавливается по отношению к той или иной системе координат. Таким образом, он совершенно условен. Нельзя сказать, положительна или отрицательна

сила P (если оси координат отсутствуют). Однако для нормальных напряжений существует правило знаков, не зависящее от выбора системы координат. Напряжение σ является положительным, если вектор напряжения направлен по внешней нормали к поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, и отрицательным в противном случае.

Для сжатия (рис. 4) аналогично получаем

$$-\sigma F - P = 0 \quad \text{или} \quad \sigma = -P/F.$$



Рис. 4

Переходя к определению деформаций, заметим, что в условиях растяжения материал будет обязательно удлиняться в направлении растяжения, в случае сжатия — укорачиваться. В противном случае работа силы P была бы отрицательна.

Для той части стержня, которая находится в условиях чистого растяжения, относительное удлинение есть

$$\varepsilon = \Delta l/l,$$

оно положительно, если Δl положительно, и отрицательно, если Δl отрицательно.

Для материала, находящегося в состоянии упругости, существует коэффициент пропорциональности E (модуль упругости, или модуль Юнга), связывающий относительное удлинение (деформацию) и напряжение, а именно $\sigma = E\varepsilon$ (закон Гука). Так как $\sigma = \pm P/F$, то $\varepsilon = \pm P/(EF)$. Здесь P — абсолютная величина внешней силы, знак выбирается по смыслу.

Заметим, что для всех материалов, применяемых в технике (кроме резины и полимеров), модуль упругости E весьма высок по сравнению с пределом упругости. Например, для стали $E = 2 \cdot 10^4$ кг/мм². Поэтому величина упругой деформации для технических сплавов составляет десятые и даже сотые доли процента.

Если материал изотропен, то цилиндр, растягиваемый в направлении его оси, остается цилиндром. Вообще говоря, кроме деформации ε в направлении растяжения будет происходить деформация в поперечном направлении. Пусть некоторый отрезок, лежащий в поперечном сечении, имел до деформации длину b (рис. 5). После деформации

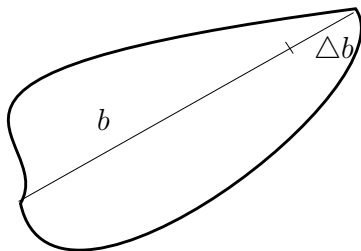


Рис. 5

его длина будет $b + \Delta b$ и относительная поперечная деформация равна $\varepsilon' = \Delta b/b$. При растяжении $\varepsilon > 0$, а $\varepsilon' < 0$

(поперечные размеры образца уменьшаются). При сжатии картина обратная. У изотропного материала величина ε' одинакова для всех направлений в поперечном сечении, поскольку нет предпочтительного направления. Если деформация упруга и подчиняется закону Гука, то, как оказывается, отношение поперечной деформации к продольной постоянно:

$$\varepsilon'/\varepsilon = -\nu \quad \text{или} \quad \varepsilon' = -\nu\sigma/E.$$

Величина ν называется *коэффициентом Пуассона*, это есть константа материала. Значение ν для стали, например, равно 0,3. При упругопластическом деформировании (за пределами текучести) отношение ε'/ε меняется в процессе растяжения.

Объем образца при растяжении (сжатии) не остается постоянным. Для изотропного материала изменение объема легко посчитать. Длина цилиндра увеличилась в отношении $(1 + \varepsilon)$, линейные размеры поперечного сечения уменьшились в отношении $(1 + \varepsilon')$, следовательно, площадь изменилась в отношении $(1 + \varepsilon')^2$. Относительное изменение объема равно:

$$\Delta V/V = (1 + \varepsilon')^2(1 + \varepsilon) - 1.$$

Поскольку упругие деформации малы, то удерживая только первые степени деформаций, получаем $\Delta V/V \sim 2\varepsilon' + \varepsilon$.

Естественно предположить, что при растяжении объем материала увеличивается, если $\varepsilon > 0$, то $\Delta V > 0$. Для этого нужно, чтобы было

$$\varepsilon' > -1/2\varepsilon.$$

Таким образом, коэффициент Пуассона упругого материала не больше $1/2$ (далее это будет строго обосновано). У несжимаемого материала $\varepsilon' = -\varepsilon/2$. Пластические

деформации практически не сопровождаются изменением объема, поэтому соотношение $(-\varepsilon'/\varepsilon)$ в опыте на растяжение упругопластического стержня не возрастает, стремясь к $1/2$.

Рассмотрим теперь случай анизотропного материала, построенного определенным образом. Пусть, например, растягивается образец, вырезанный из тканевого стеклопластика вдоль направления основы ткани (рис. 6,а) Через ось стержня проходят две плоскости симметрии. Очевидно, что призматический образец после деформации останется симметричным, однако деформации в поперечных направлениях 1 и 2 будут разными, ε' и ε'' соответственно. В упругой области $\varepsilon' = \nu_1\varepsilon$, $\varepsilon'' = -\nu_2\varepsilon$. Здесь ν_1, ν_2 — различные коэффициенты Пуассона.

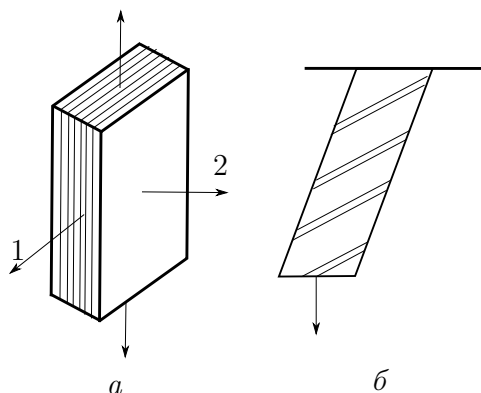


Рис. 6

При анизотропии более общего вида, когда указать плоскость симметрии нельзя или когда плоскости не параллельны оси растяжения, деформация может иметь более сложный характер, растяжение может сопровождаться перекашиванием стержня. Это легко представить, если

выбрать образец, состоящий из набора жестких пластин, наклоненных по отношению к оси и соединенных между собой прослойками из податливого материала (рис. 6,б).

2.3. Большая деформация

Удлинение стержня при растяжении может достигать больших величин. Прежде всего, остановимся на понятии напряжения. При растяжении уменьшается площадь поперечного сечения. Истинное напряжение есть сила, поделенная на фактическую площадь поперечного сечения. Таким образом, оно зависит не только от величины силы, но и от величины вызванной этой силой деформации. Чтобы построить зависимость (диаграмму) $\sigma - \varepsilon$, нужно во время опыта на растяжение непрерывно измерять поперечный размер стержня, что бывает затруднительно. Часто под напряжением понимают силу, поделенную на первоначальную площадь поперечного сечения. Определенное таким образом напряжение называется условным. Иногда его обозначают σ_0 .

Относительная деформация была определена как отношение $\Delta l/l$. Это определение может быть сохранено и для больших удлинений. Однако с ним связано некоторое неудобство. Относительная деформация не аддитивна. Пусть стержень деформировался в два приема: первоначальная длина l_0 после деформации стала l_1 . Тогда $\varepsilon_1 = (l_1 - l_0)/l_0$. Теперь стержень деформирован еще раз, длина его стала l_2 . Длина l_1 по отношению ко второму этапу является первоначальной, значит, относительная деформация на втором этапе есть $\varepsilon_2 = (l_2 - l_1)/l_1$. Полная деформация, отнесенная к первоначальной длине, есть $\varepsilon = (l_2 - l_0)/l_0$. Очевидно, что $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ малы по сравнению с единицей, то соотношение $\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ спра-

ведливо с точностью до величины второго порядка малости. Таким образом, малые деформации аддитивны:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \frac{l_1}{l_0} - 1 + \frac{l_2}{l_1} - 1 = \frac{l_1^2 + l_2 l_0 - 2l_1 l_0}{l_1 l_0} = \\ &= \frac{(l_1 - l_0)^2 + l_0(l_2 - l_0)}{l_1 l_0},\end{aligned}$$

если $l_1 - l_0 \ll 1, l_0/l_1 \sim 1$, то

$$\frac{(l_1 - l_0)^2}{l_1 l_0} + \frac{l_0}{l_1} \frac{l_2 - l_0}{l_0} \sim \frac{l_2 - l_0}{l_0} = \varepsilon.$$

В качестве меры деформации, вообще говоря, можно выбрать любую функцию от ε . Определенными преимуществами обладает так называемая логарифмическая деформация:

$$\bar{\varepsilon} = \ln(l/l_0) = \ln(1 + \varepsilon).$$

При малых деформациях, разлагая логарифмы в ряд и удерживая первый член, имеем $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$. Таким образом, малая логарифмическая деформация совпадает с обычной. Логарифмические деформации аддитивны:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \ln(l_1/l_0), \bar{\varepsilon}_2 = \ln(l_2/l_0), \bar{\varepsilon} = \ln(l_2/l_0), \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2.$$

2.4. Неустойчивость растяжения при большой деформации

При изучении больших деформаций закон деформирования естественно задавать как соотношение между истинным напряжением и деформацией. Выбор меры деформации в данном случае безразличен. Сохраним обычные определения: $\varepsilon = (l - l_0)/l_0, l = l_0(1 + \varepsilon), \sigma_0 = P/F_0 -$

условное напряжение, $\sigma = P/F$ — истинное напряжение (F — фактическая площадь поперечного сечения). Изменение объема для всех реальных материалов мало, поэтому можно приблизительно считать объем неизменным. Тогда $Fl = F_0 L_0$ и $F = F_0/(1 + \varepsilon)$. Следовательно, $\sigma = P/F = P(1 + \varepsilon)/F_0 = \sigma_0(1 + \varepsilon)$. Пусть зависимость напряжений от деформаций определяет функция $\sigma = \phi(\varepsilon)$. Для реальных материалов она монотонно возрастает. С увеличением деформации напряжение увеличивается. Это условие означает, что материал сам по себе устойчив (физическая устойчивость). Но в опыте на растяжение непосредственно измеряется сила или пропорциональная ей величина σ_0 . Может случиться, что процесс растяжения окажется неустойчивым. Это означает, что величина P , достигнув некоторого определенного значения, начнет уменьшаться при дальнейшем росте деформации. Выясним, когда это произойдет. Имеем

$$\sigma_0 = \frac{\phi(\varepsilon)}{1 + \varepsilon}.$$

Приравняем производную от σ_0 к нулю. Получаем

$$\frac{d\sigma_0}{d\varepsilon} = \frac{\phi'(1 + \varepsilon) - \phi}{(1 + \varepsilon)^2} = 0,$$

откуда

$$\phi'(\varepsilon) = \frac{\phi(\varepsilon)}{1 + \varepsilon} = \frac{\sigma}{1 + \varepsilon}.$$

Если закон деформирования задан графиком функции $\phi(\varepsilon)$, то значение деформации, при котором происходит потеря устойчивости, можно найти графически. Для этого из точки $\varepsilon = -1$ нужно провести касательную к графику $\phi(\varepsilon)$. Абсцисса точки касания определит критическую деформацию (рис. 7).

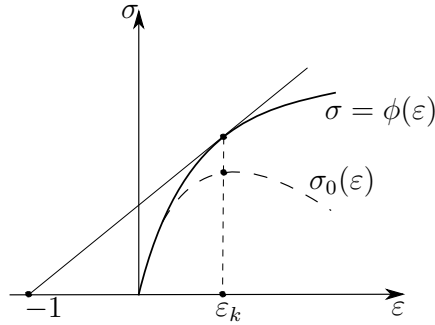


Рис. 7

Уравнение касательной:

$$\sigma - \phi(\varepsilon_k) = \phi'(\varepsilon_k)(\varepsilon - \varepsilon_k).$$

Найдем ее пересечение с осью абсцисс, где $\sigma = 0$. Имеем

$$-\phi(\varepsilon_k) = \phi'(\varepsilon_k)(\varepsilon - \varepsilon_k),$$

$$-\phi(\varepsilon_k) = \frac{\phi(\varepsilon_k)}{1 + \varepsilon_k}(\varepsilon - \varepsilon_k),$$

$$-1 = \frac{1}{1 + \varepsilon_k}(\varepsilon - \varepsilon_k),$$

отсюда $\varepsilon = -1$. Здесь использован тот факт, что ε_k есть решение уравнения $\phi'(\varepsilon) = \phi(\varepsilon)/(1 + \varepsilon)$.

Отметим, что при $\varepsilon > \varepsilon_k$ условное напряжение, т. е. растягивающая сила, уменьшается.

При задании законов деформирования, упругого и неупругого, часто прибегают к аппроксимации их степенными функциями. Пусть $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^{1/n}$, где $n > 1$. Тогда

$$\phi'(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{1/n}}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{n} \varepsilon^{\frac{1-n}{n}}.$$

Отсюда $\varepsilon_k = \frac{1}{n-1}$. Показатель n в предполагаемом степенном законе находится путем измерения деформации, соответствующей максимуму на диаграмме растяжения.

2.5. Одномерные модели

Определяющие соотношения в механике деформируемого твердого тела строят, используя экспериментальные данные. Наиболее простыми и распространенными экспериментами, по которым определяют свойства материала и связь между напряжениями и деформациями, являются опыты на растяжение и сжатие цилиндрических образцов, в которых фиксируют также линии разгрузки, характеристики которых играют важную роль при классификации материалов. Опираясь на данные этих экспериментов, строят так называемые одномерные механоматематические модели материала, которые затем распространяют на произвольный трехмерный случай.

В качестве исходной рассмотрим диаграмму растяжения–сжатия для образцов и металлических материалов (рис. 8). На рисунке $\sigma_{\Pi}^+, \sigma_{\Pi}^-$ — пределы пропорциональности соответственно при растяжении и сжатии, аналогично σ_+^T, σ_-^T — пределы текучести, σ_+^B, σ_-^B — пределы прочности, $\varepsilon_{\Pi}^+, \varepsilon_{\Pi}^-, \varepsilon_+^T, \varepsilon_-^T, \varepsilon_+^B, \varepsilon_-^B$ — деформации, им соответствующие. Стрелками показаны направления нагружения и разгрузки. Отметим, что при построении моделей, как правило, используют ветви диаграмм до предела прочности, когда геометрия образца не изменяется и распределение продольных напряжений по сечению равномерно. В этом случае связь между продольными напряжениями и деформациями принимает наиболее простой вид. После превышения деформацией величины ε_+^B в образце образуется так называемая шейка, в районе

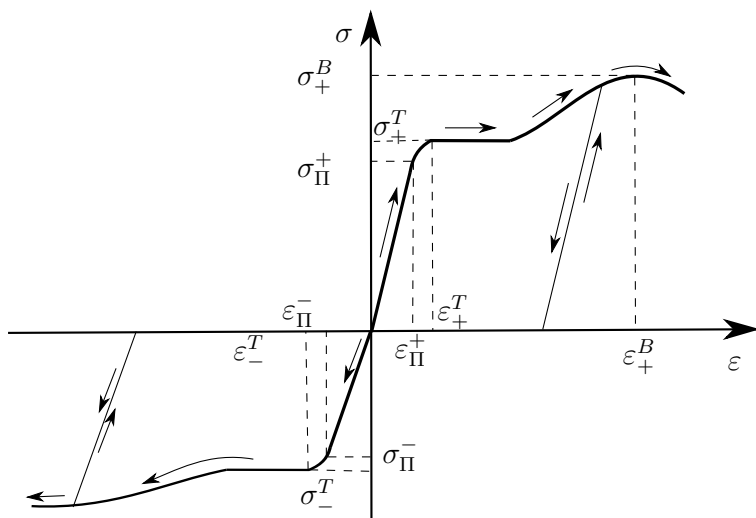


Рис. 8. Диаграмма деформирования

которой возникает трехмерное сложнапряженное состояние (нарушается однородность деформации).

Наконец, заметим, что определение точек диаграммы, таких как предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, предел прочности, достаточно условно, т. е. располагая аппаратурой разной чувствительности, можно обнаружить их при больших или меньших напряжениях.

Рассмотрим некоторые идеализации приведенной диаграммы.

Модель линейно-упругого тела

Эксперименты при одноосном растяжении показали, что подавляющее большинство материалов в определенном диапазоне деформаций обладает линейно-упругими

свойствами. Связь между напряжениями и деформациями представляется для них в виде идеализированной диаграммы — прямой линии (рис. 9). В аналитическом виде это выражается при помощи следующей определяющей связи:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

носящей название закона Гука. Здесь $E = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{const}$ — модуль Юнга. В этом случае коэффициент поперечной деформации также является константой. Разгрузка происходит по прямой нагружения в обратную сторону и завершается в начале координат. При этом остаточные деформации не наблюдаются.

Линейная зависимость между напряжениями и деформациями означает, что при увеличении (уменьшении) внешних сил, одновременно и статически прикладываемых к упругому телу в каком-либо известном отношении, в той же пропорции возрастают (убывают) напряжения, деформации и перемещения в любой точке тела.

Линейно-упругие материалы, имеющие различные модули упругости при растяжении и сжатии, называются разномодульными.

Идеализированная диаграмма растяжения–сжатия таких материалов показана на рис. 10. Определяющая связь между σ и ε имеет вид:

$$\sigma = \begin{cases} E^+ \varepsilon, & E^+ = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{const} \quad (\text{растяжение}), \\ E^- \varepsilon, & E^- = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{const} \quad (\text{сжатие}). \end{cases}$$

Модель нелинейно-упругого материала

Если в начальном диапазоне деформаций диаграмма растяжения материала представляется явно выраженным отрезком кривой, то в этих случаях в качестве закона,

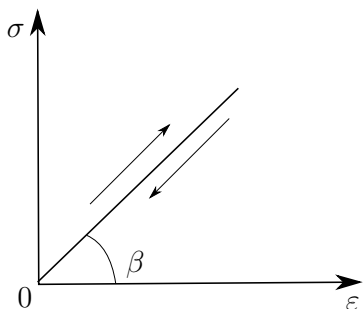


Рис. 9

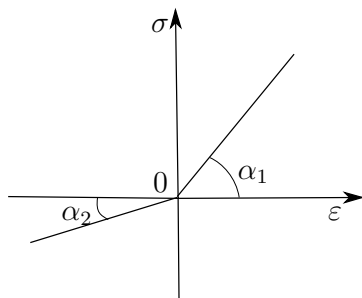


Рис. 10

связывающего напряжения и деформации, следует брать нелинейное соотношение

$$\sigma = f(\varepsilon).$$

Процесс медленной разгрузки происходит по кривой BAO (рис. 11), причем в обратном порядке наблюдаются те же состояния, что и при нагрузке по пути OAB . Процесс возвращается в начальную точку O и не происходит никаких изменений, т. е. процесс OAB оказывается обратимым.

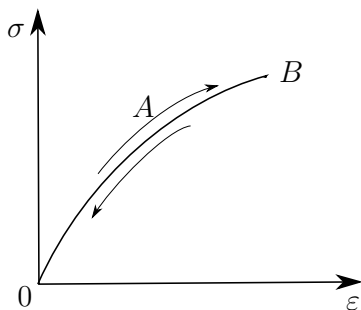


Рис. 11

В определенном диапазоне деформаций (после предела текучести) снятию нагрузки для большинства конструктивных материалов соответствует так называемая прямая разгрузки (прямая BC на рис. 12), которая приходит в некоторую точку C , не совпадающую с началом координат. В результате тело не приходит в исходное состояние и наблюдаются остаточные или пластические деформации ε^p (рис. 12). При последующем нагружении деформирование происходит по линейному закону (участок CB), и отступление от линейного закона возможно лишь при напряжениях, превышающих те, которые были в начале разгрузки.

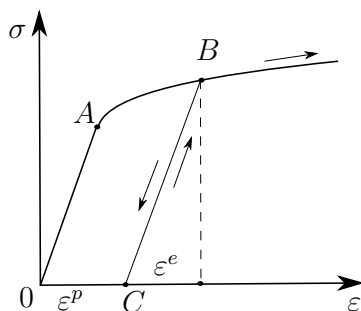


Рис. 12

При пластическом состоянии в каждый данный момент времени и для данной температуры зависимость между напряжениями и деформациями становится взаимнооднозначной, если известны все предшествующие напряжения и деформации и соответствующие значения температуры. Это выполняется в случае активного нагружения (без разгрузок) или в ходе разгрузки.

Материалы, проявляющие пластические свойства, в зависимости от вида этого проявления могут аппроксимироваться различными механико-математическими моделями.

1. Модель упруго-идеально-пластического тела

Для материалов, обладающих резким переходом от стадии упругости к стадии пластичности и имеющих длинную площадку текучести (например, мягкие стали), применяют идеализированную диаграмму, носящую название диаграммы Прандтля (рис. 13). Она характеризуется определенной граничной величиной напряжений $\sigma = \sigma^T$, называемой пределом текучести. До этого предела материал является линейно-упругим, а после его достижения он деформируется при постоянном напряжении, т. е. течет пластически, причем величина пластической деформации не определена, она может расти сколь угодно. При разгрузке тело обладает линейно-упругим поведением с модулем упругости, равным начальному, и, кроме того, возникает остаточная деформация. При повторном нагружении материал снова деформируется упруго до достижения предшествующего предела текучести, после чего начинает пластически течь.

Связь между напряжениями и деформациями определяется выражениями

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon < \varepsilon^T; \\ \sigma^T, & \varepsilon \geq \varepsilon^T; \text{нагружение } \left(\frac{d\varepsilon}{dt} > 0\right); \\ \sigma^T - E(\varepsilon_1 - \varepsilon), & \text{разгрузка } \left(\frac{d\varepsilon}{dt} < 0\right). \end{cases}$$

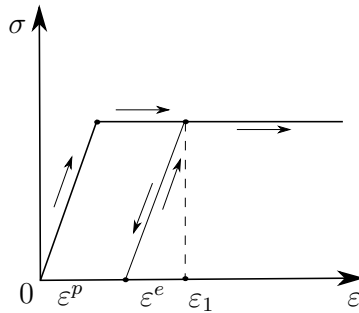


Рис. 13

2. Модель упругопластического тела с линейным упрочнением

Материал деформируется упруго до достижения предела текучести. При превышении этого предела при нагружении (увеличении нагрузки) связь между напряжениями и деформациями также будет линейной, но с другим угловым коэффициентом (рис. 14). При разгрузке материал является линейно-упругим, с образованием остаточных деформаций. При повторном нагружении материал будет деформироваться линейно-упруго (модуль упругости E) до достижения напряжения, с которого началась разгрузка. Это напряжение играет роль нового предела текучести (σ_i^T), превышающего первоначальный, вследствие чего считаем, что материал получил пластическое упрочнение.

Если продолжить нагружение, то связь между напряжениями и деформациями будет следовать первоначальной линейной зависимости. Поэтому говорят, что упрочнение является линейным.

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \sigma < \sigma^T; \\ \sigma^T + E_1(\varepsilon - \varepsilon^T), & \sigma > \sigma^T, \frac{dP}{dt} > 0 \quad (\text{нагружение}); \\ \sigma_i^T - E(\varepsilon_i^T - \varepsilon), & \frac{dP}{dt} < 0 \quad (\text{разгрузка}), \end{cases}$$

$$E = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{const}, E_1 = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{const}.$$

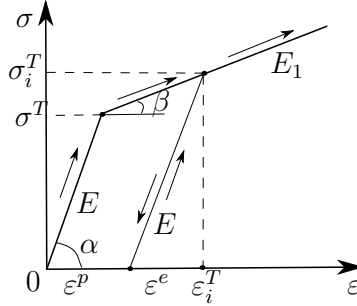


Рис. 14

3. Модель упругопластического тела с нелинейным упрочнением

Модель обладает свойствами, подобными свойствам предыдущей модели. В обоих случаях материал характеризуется двумя различными аналитическими зависимостями между напряжениями и деформациями при нагружении и разгрузке. Отличие от предшествующей модели состоит в том, что при превышении предела текучести связь между напряжениями и деформациями является нелинейной, т. е. материал упрочняется нелинейно (рис. 15).

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \sigma < \sigma^T; \\ f(\varepsilon), & \sigma > \sigma^T \text{ и } \frac{dP}{dt} > 0 \quad (\text{нагружение}); \\ \sigma_i^T - E(\varepsilon_i^T - \varepsilon), & \frac{dP}{dt} < 0 \quad (\text{разгрузка}). \end{cases}$$

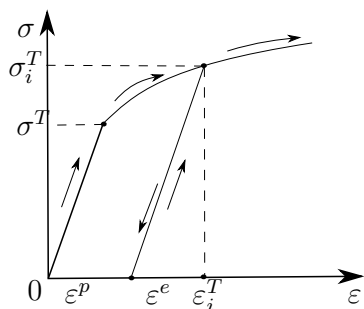


Рис. 15

4. Жестко-пластические модели

Для материалов, при деформировании которых пластические деформации значительно превосходят упругие, применяют жестко-пластические модели, где пренебрегают упругими деформациями (рис. 16—18).

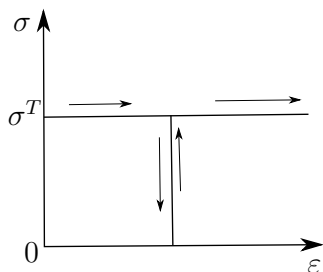


Рис. 16. Жестко-идеально-пластическое тело

5. Уругопластические модели с эффектом Баушингера

Многие материалы проявляют так называемый эффект Баушингера. Он проявляется в том, что в результате разгрузки с некоторого уровня напряжений, когда напряжения равны $\sigma_i^T > \sigma^T$, и последующего сжатия материал

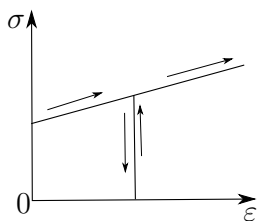


Рис. 17. Жестко-пластическое тело с линейным упрочнением

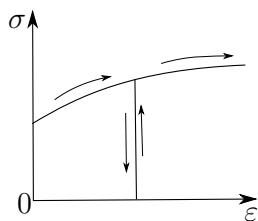


Рис. 18. Жестко-пластическое тело с нелинейным упрочнением

переходит в пластическое состояние при напряжении, модуль которого меньше, чем σ_i^T ($|\sigma_-^T|_i < \sigma_i^T$) (рис. 19). То есть вследствие предварительной пластической деформации растяжения ε^p предел текучести при сжатии меньше предела текучести при растяжении, равного напряжению в момент начала разгрузки.

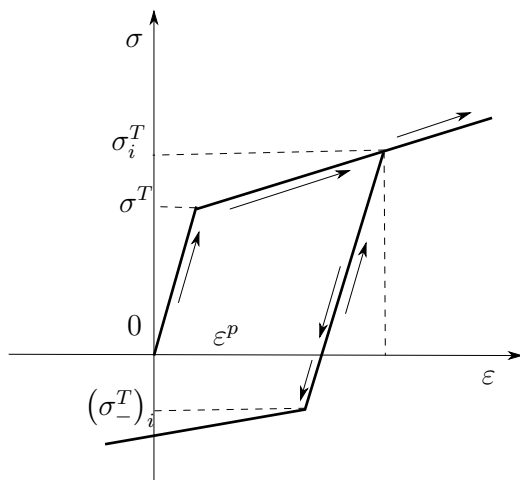


Рис. 19

Согласно простейшей идеализации опытных данных, предел текучести при сжатии должен уменьшаться ровно настолько, насколько увеличился предел текучести при растяжении. В этом случае говорят об идеальном эффекте Баушингера.

3. Расчет на прочность

При расчетах инженерных конструкций обычно считают недопустимым либо проявление значительных пластических деформаций, либо разрушение всей конструкции в целом или ее отдельных элементов. Характерное напряжение, при котором пластический материал приобретает заметную пластическую деформацию, называется *пределом текучести* и обозначается σ_T . Хрупкие материалы ведут себя практически упруго вплоть до момента разрушения, которое происходит при достижении напряжением значения σ_B , так называемого предела прочности или временно-го сопротивления. Если рассматривать реальные упруго-пластические материалы, то можно говорить об условном пределе текучести. Предел прочности определяют также и для пластичных материалов, однако значительное изменение формы образца в области больших деформаций, при которых происходит разрыв, делает эту величину еще более условной, чем предел текучести.

При расчетах элементов конструкций необходимо иметь некоторый запас, учитывающий неточность изготовления, возможные перегрузки в ходе эксплуатации, несоответствие характеристик реального материала паспортным данным, неточность выбранной схемы расчета. Поэтому допускаемое напряжение $[\sigma]$ выбирают, деля σ_T или σ_B на коэффициент прочности n . Таким образом,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad \text{— для пластических материалов,}$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B} \quad \text{— для хрупких материалов.}$$

Для единичного стержня, находящегося под действием

растягивающей или сжимающей нагрузки, условие прочности имеет вид:

$$|\sigma| \leq [\sigma]. \quad (1)$$

Для статически определимой стержневой системы условие прочности будет выполнено, если неравенство (1) не нарушается ни для одного из элементов. В таких системах разрушение одного из стержней или переход его в пластическое состояние превращает систему в механизм, получающий свободу деформироваться практически неограниченно. Последнее слово употреблено, естественно, в условном смысле, так как возможность неограниченной деформации относится к идеально-пластическим материалам, реальные же материалы обладают упрочнением. Кроме того, даже система из идеально-пластических стержней при увеличении деформации меняет форму, в результате чего иногда (не всегда) увеличение деформации требует увеличения нагрузки.

Поскольку в статически определимой системе напряжения во всех стержнях представляют собой линейные функции действующих сил (система уравнений равновесия линейна и число уравнений равно числу неизвестных), запас прочности по напряжениям (условие (1)) будет в то же время запасом прочности по нагрузкам. В статически неопределимой системе дело обстоит иначе, здесь разрушение или переход в состояние текучести одного из стержней еще не означает разрушение системы в целом.

Рассмотрим пример. Имеется система из трех идеально-упруго-пластических стержней с одинаковым пределом текучести σ_T , растягиваемая вертикальной силой P (рис. 20). Уравнение равновесия содержит два неизвестных:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = P.$$

Разрешим его, установив кинематическую связь между удлинениями стержней (деформации должны быть совместными и не нарушать кинематических связей).

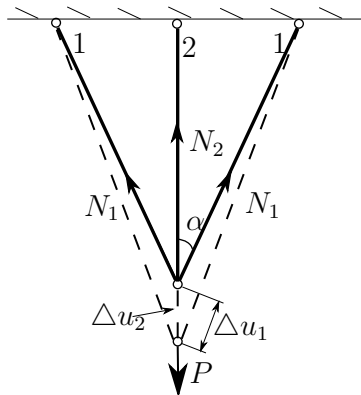


Рис. 20

Имеем

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{\sigma_1}{E} l_1 = \varepsilon_1 l_1, \Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{EF} = \frac{\sigma_2}{E} l_2 = \varepsilon_2 l_2.$$

Здесь площадь поперечного сечения стержней одинакова. Кроме того, $l_1 = l_2 / \cos \alpha$ и тогда $\Delta_1 = \frac{N_1 l_2}{EF \cos \alpha}$. В силу малости удлинения стержней справедливо равенство $\Delta_1 = \Delta_2 \cos \alpha$. Тогда

$$\frac{N_1 l_2}{EF \cos \alpha} = \frac{N_2 l_2}{EF} \cos \alpha$$

и $N_1 = N_2 \cos^2 \alpha$. Подставляя равенство $N_1 = N_2 \cos^2 \alpha$ в уравнение равновесия, находим

$$N_1 = P \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad N_1 = P \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Очевидно, что $N_2 > N_1$, и при увеличении силы P в среднем стержне предел текучести будет достигнут раньше. Однако это не означает исчерпания несущей способности системы в целом. Крайние стержни, оставаясь упругими, препятствуют неограниченной пластической деформации среднего стержня. Таким образом, можно различить две стадии работы системы: упругую стадию, в которой усилия определяются данными формулами, и упругопластическую, которая наступает после перехода хотя бы одного стержня в пластическое состояние. Значение силы P_1 , при котором происходит переход от первой стадии ко второй, определяется из условия, что при $P = P_1$, $N_2 = \sigma_T F$. Тогда

$$N_2 = P_1 \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} = \sigma_T F$$

или

$$P_1 = \sigma_T F (1 + 2 \cos^3 \alpha). \quad (2)$$

Во второй стадии усилие N_2 остается постоянным (стержень идеально-упруго-пластический), т. е. $N_2 = \sigma_T F$. Теперь задача определения усилия N_1 решается только одним уравнением статики:

$$N_1 = \frac{P - \sigma_T F}{2 \cos \alpha}.$$

При дальнейшем увеличении силы текучесть проявляется и в наклонных стержнях. Полагая $N_1 = \sigma_T F$, находим

$$P_T = \sigma_T F (1 + 2 \cos \alpha). \quad (3)$$

Принимая один и тот же коэффициент запаса n , получим следующие величины допускаемой нагрузки:

— при расчете по допускаемым напряжениям из формулы (2)

$$P_{\leq} = \frac{\sigma_T F}{n} (1 + 2 \cos^3 \alpha),$$

— при расчете по допускаемым нагрузкам из формулы (3)

$$P \leq \frac{\sigma_T F}{n} (1 + 2 \cos \alpha).$$

Ясно, что второй способ приводит к большим допустимым нагрузкам, чем первый.

Наконец, покажем зависимость перемещения точки приложения силы $u = \Delta u_2$ от силы P (рис. 21).

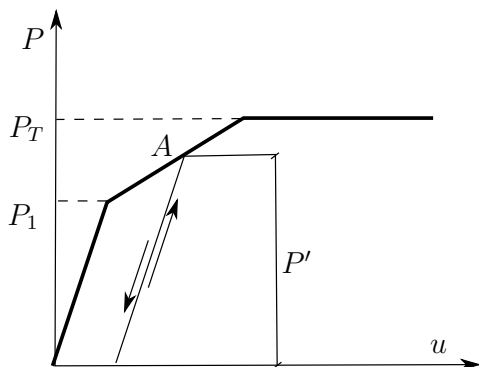


Рис. 21

Из рис. 21 четко видно, что данная зависимость является кусочно-линейной.

4. Основные понятия теории упругости

4.1. Упругая энергия и упругие потенциалы

Будем рассматривать упругое тело как механическую консервативную систему, т. е. систему, для которой работа внешних сил целиком затрачивается на сообщение кинетической энергии движения тела и накопление полностью обратимой потенциальной энергии. Высказанное утверждение можно записать следующим образом:

$$A = \tilde{T} + \tilde{U}.$$

Здесь A — работа внешних сил, \tilde{T} — кинетическая энергия движения, \tilde{U} — потенциальная энергия деформации. Чтобы вычислить величину \tilde{U} , нужно предположить, что внешняя сила прикладывается таким образом, чтобы кинетической энергией можно было пренебречь. Очевидно, для этого нужно, чтобы сила прикладывалась достаточно медленно и производила деформацию с малой скоростью. Тогда $A = \tilde{U}$. Заметим, что для выполнения этого равенства с большой точностью нет необходимости делать скорость очень малой, так как кинетическая энергия изменяется пропорционально квадрату скорости: уменьшая скорость в 10 раз, уменьшаем величину \tilde{T} в 100 раз.

Процессы нагружения с очень малой скоростью называют *квазистатическими*.

Рост деформаций стержня можно представить как последовательность бесконечно малых приращений удлинения $d(\Delta l)$, вызываемых ростом силы, которая связана с

удлинением при растяжении–сжатии законом Гука. Поэтому

$$A = \tilde{U} = \int_0^{\Delta l} P d(\Delta l).$$

Полагая $P = \sigma F$, $\Delta l = \varepsilon l$ и замечая, что $lF = V$ (V — объем стержня), находим

$$\tilde{U} = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon.$$

Закон упругости связывает σ и ε зависимостью

$$\sigma = \phi(\varepsilon).$$

Отметим, что величина

$$U = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} \phi(\varepsilon) d\varepsilon$$

представляет собой удельную упругую энергию (энергию на единицу объема).

Для линейно-упругого тела следует

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Для упругой энергии стержня в целом имеем

$$\tilde{U} = Fl \frac{E (\Delta l/l)^2}{2} = \frac{FE (\Delta l/l) \Delta l}{2} = \frac{1}{2} P' \Delta l$$

(усилие в стержне в соответствии с законом Гука равно $FE (\Delta l/l)$). Обратим внимание на последнее выражение для \tilde{U} . Условие $A = \tilde{U}$ требует, чтобы сила прикладывалась постепенно, возрастая от нуля до конечного значения P' . График зависимости силы от перемещения представлен на рис. 22, где работа изображается площадью заштрихованного треугольника.

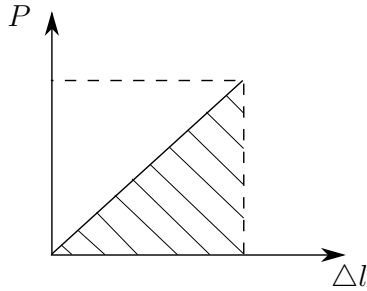


Рис. 22

В теоретической механике консервативными силами называются силы, имеющие потенциал, только для таких сил справедливо уравнение сохранения механической энергии ($A = \tilde{T} + \tilde{U}$). Вообще зависимость переменных $y_i (i = 1 \dots n)$ от переменных $x_i (i = 1 \dots n)$ называется *потенциальной*, когда существует такая функция $U(x_k)$, что

$$y_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}. \quad (4)$$

Оказывается, что если справедливы соотношения (4), то обратные соотношения, выражающие x_k через y_k , могут быть представлены в аналогичной форме, т. е. существует функция $\Phi(y_k)$ такая, что

$$y_k = \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}. \quad (5)$$

Переход от соотношений (4) к (5) называется *преобразованием Лежандра*. Осуществляется оно следующим образом. Положим

$$\Phi = x_i y_i - U. \quad (6)$$

Здесь суммирование по повторяющимся индексам.

Предполагается, что соотношения (4) решены относительно x_k и эти выражения внесены в (6), поэтому $\Phi = \Phi(y_k)$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = x_k + y_i \frac{\partial x_i}{\partial y_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}.$$

Вследствие (4) второй и третий члены в правой части взаимно уничтожаются, и остается соотношение (5).

Дифференцируя теперь выражение $U = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon$ по ε , получаем

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}.$$

Это и есть условие того, что упругая энергия U служит потенциалом напряжений. Применяя преобразование Лежандра, т. е. полагая

$$\Phi = \sigma \varepsilon - U = \Phi(\sigma),$$

имеем

$$\varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.$$

Упругий потенциал U имеет непосредственный механический смысл, это потенциальная энергия упругой деформации, накопленная в теле. Величина Φ такого непосредственного смысла не имеет. Иногда эту величину называют дополнительной работой. Происхождение такого названия ясно из рис. 23. Если U представляет собой заштрихованную площадь, то Φ дополняет ее до площади прямоугольника со сторонами σ и ε .

Для линейно-упругого материала потенциал деформаций Φ численно равен потенциалу напряжений U . Так как для линейно-упругого тела $U = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$, то

$$\sigma = \frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{dU(\sigma)}{d\sigma}.$$

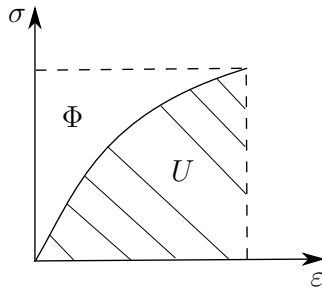


Рис. 23

Заметим, что вся изложенная теория не предполагает упругости материала, пока не произведена разгрузка, и, следовательно, деформация не уменьшается, связь между деформацией и напряжением $\sigma = \phi(\varepsilon)$ одинакова как для упругого, так и для пластического тела.

4.2. Термодинамика упругой деформации

Приведенное выше определение упругой деформации и, соответственно, упругого тела нуждается в уточнении. В действительности деформация сопровождается изменением температуры. Более общее определение *упругого тела* будет следующим: работа сил, приложенных к упругому телу, на замкнутом по деформации и температуре цикле равна нулю. Разница состоит в том, что в конце цикла температура должна быть той же, что и в начале.

Рассмотрим элемент упругого тела, находящегося в однородном состоянии простого растяжения, в виде кубика с единичным ребром. На две противоположные грани этого кубика действуют нормальные напряжения σ . Так как площадь грани равна единице, действующая сила также есть σ . Поскольку длина ребер равна единице, то ε представляет собой абсолютное удлинение.

Будем рассматривать силу σ как внешнюю по отношению к элементу. Если сила увеличилась на $d\sigma$, удлинение увеличилось на $d\varepsilon$, и сила при этом произвела работу $\sigma d\varepsilon$. Количество тепла в объеме, вообще говоря, изменилось на dQ . Согласно *первому началу термодинамики*, изменение внутренней энергии равно:

$$dU = \sigma d\varepsilon + dQ.$$

Второе начало термодинамики утверждает существование функции состояния S , называемой энтропией, такой, что для обратимых процессов

$$dQ = TdS,$$

где T — температура. Таким образом,

$$dU = \sigma d\varepsilon + TdS.$$

Это выражение должно быть полным дифференциалом, внутренняя энергия есть функция деформации и энтропии, т. е.

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}.$$

Таким образом, внутренняя энергия является термодинамическим потенциалом. С помощью преобразования Лежандра строятся другие термодинамические потенциалы, а именно

свободная энергия:

$$U^*(\varepsilon, T) = U - TS, \quad \sigma = \frac{\partial U^*}{\partial \varepsilon}, \quad S = -\frac{\partial U^*}{\partial T},$$

энтальпия:

$$\Phi(\sigma, S) = \sigma \varepsilon + U, \quad \varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad T = \frac{\partial \Phi}{\partial S},$$

свободная энтальпия:

$$\Phi^*(\sigma, T) = \Phi - TS, \quad \varepsilon = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma}, \quad S = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial T}.$$

Процесс называется адиабатическим, если не происходит теплообмена с окружающей средой, т. е. $dQ = 0$ и, следовательно, $S = \text{const}$. Ясно, что для адиабатического процесса потенциал напряжений представляет собой внутреннюю энергию, а потенциал деформаций — энтальпию. Для изотермического процесса $T = \text{const}$. Эти потенциалы — соответственно свободная энергия и свободная энтальпия. Только для изотермического и адиабатического процессов зависимость между напряжением и деформацией в упругом теле однозначна. Вообще если существует теплообмен с окружающей средой, эта однозначность нарушается.

4.3. Общие свойства упругих и пластических стержневых систем

Теоремы Лагранжа и Кастильяно

Предположим, что к упругой системе приложено n обобщенных сил F_i , которым соответствуют обобщенные перемещения q_i . Из определения упругости следует, что перемещения являются однозначными функциями сил, и наоборот,

$$q_i = q_i(F_i), \quad F_i = F_i(q_i). \quad (7)$$

Однако вид этих зависимостей для упругого тела может быть вполне произволен. Дело в том, что из определения упругости следует, что задание сил или перемещений однозначно определяет состояние упругого тела, которое характеризуется заданием параметров q_i или F_i , а также заданием его внутренней энергии U . Для наглядности изображения состояния системы вводят n -мерные евклидовы

пространства сил и перемещений. Пространство сил — это n -мерное пространство, в котором по осям ортогональной декартовой системы координат откладываются значения сил F_i , задание совокупности сил определяет точку в этом пространстве. Аналогичным образом определяется пространство перемещений. Формулы (7) устанавливают взаимнооднозначное соответствие точек этих пространств.

Будем менять силы от некоторого исходного состояния произвольным образом, но так, чтобы в конце концов они приняли данные исходные значения. Изображающая точка в пространстве сил опишет при этом замкнутую кривую. Если тело упруго, то мы должны получить прежнее значение перемещений и вернуться к прежнему значению внутренней энергии. В пространстве перемещений изображающая точка также опишет замкнутую кривую.

Согласно первому началу термодинамики, в процессе деформирования все время должно выполняться следующее соотношение:

$$dU = dA + dQ, \quad (8)$$

где dU — приращение внутренней энергии; $dA = F_i dq_i$ — работа внешних сил (суммирование по поторяющимся индексам); dQ — количество тепла, поступившего в систему. Проинтегрируем (8) по замкнутому пути деформирования. Так как мы возвратимся к прежнему значению внутренней энергии, то интеграл от dU равен нулю. Далее $\oint dQ$ — количество тепла, поступившего в систему за цикл. Для адиабатического процесса этот интеграл равен нулю (в адиабатическом процессе тепло не поступает в систему). Он равен нулю и для изотермического процесса, поскольку вследствие второго начала термодинамики $dQ = TdS$ при $T = \text{const}$:

$$\oint dQ = T \oint dS = 0,$$

поскольку энтропия S есть функция состояния и после деформирования по замкнутому пути мы должны прийти к прежнему значению энтропии. Таким образом, в двух указанных случаях

$$\oint F_i dq_i = 0.$$

Отсюда следует, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал некоторой функции, которую будем называть потенциалом сил.

$$F_i dq_i = d\Pi(q_s)$$

или

$$F_i = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (9)$$

Соотношение (9) составляет содержание *теоремы Лагранжа*. Для адиабатического процесса, когда $dQ = 0$, из (8) сразу видно, что $\Pi = U$ представляет собой внутреннюю энергию тела. Для изотермического процесса Π является свободной энергией. Для большинства упругих тел термические эффекты существенной роли не играют (отличие адиабатического и изотермического модулей мало), поэтому делать разницу между внутренней энергией и свободной энергией нет нужды.

Будем называть функцию Π (или U) двояко, иногда упругой энергией, иногда потенциалом сил. Второй термин может быть предпочтительней. Пусть тело состоит из упругопластических элементов и при его нагружении все элементы деформируются активно, тогда не будет происходить разгрузка. Связь между напряжениями и деформациями при активной пластической деформации совершенно неотличима от закона нелинейной упругости до тех пор, пока не произведена разгрузка. Очевидно, что связь между внешними силами и перемещениями будет такой

же, как для нелинейно-упругого тела, и формулы (9) будут справедливы, хотя функция Π уже не будет внутренней или свободной энергией. Конечно, вывод этих формул, основанный на рассмотрении замкнутого цикла деформирования и законов термодинамики обратимых процессов, для пластического тела несправедлив. Их иногда получают из соображений термодинамики необратимых процессов. Мы предпочтем ограничиться замечанием, что термодинамика необратимых процессов как раз и основывается на том факте, что для определенных процессов нельзя сказать, обратимы они или нет, пока эти процессы идут в одном направлении.

Обращение формул (9) достигается с помощью преобразования Лежандра. Положим

$$\Phi(F_i) = F_i q_i - \Pi.$$

Следует считать, что в правой части q_i являются функциями от F_i . Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_k} = q_k + F_i \frac{\partial q_i}{\partial F_k} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial F_k} = q_k.$$

Здесь $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = F_i$. Тогда

$$q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial F_i}. \quad (10)$$

Функцию $\Phi(F_i)$ называют потенциалом перемещений. Формулы (10) составляют содержание *теоремы Кастильяно*. Потенциал Φ называют дополнительной работой так же, как и в случае простого растяжения. Вспоминая определение основных термодинамических потенциалов, убеждаемся, что для адиабатического процесса Φ представляет энтальпию, для изотермического — свободную энергию.

4.4. Линейные упругие системы

Теоремы Лагранжа и Кастильяно были изложены выше для произвольных упругих систем, необязательно геометрически или физически линейных. Наиболее просто их применение к линейным системам. Для линейных систем как потенциал сил, так и потенциал перемещений представляют собой квадратичные формы, и соотношения между силами и перемещениями имеют вид линейных соотношений

$$F_i = c_{ij}q_j, \quad q_i = \beta_{ij}F_j, \quad (11)$$

где β_{ij} — коэффициенты влияния (податливости); c_{ij} — коэффициенты жесткости; $c_{ij} = |\beta_{ij}| / |\beta|$, $\beta_{ij} = |c_{ij}| / |c|$. Здесь $|c|$, $|\beta|$ — определители матриц c_{ij} , β_{ij} ; $|c_{ij}|$, $|\beta_{ij}|$ — алгебраические дополнения элементов c_{ij} , β_{ij} соответствующих матриц (суммирование по повторяющимся индексам). По теореме Лагранжа

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad F_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_j} = \frac{\partial F_j}{\partial q_i}.$$

Подставляя (11), находим $c_{ij} = c_{ji}$, аналогично $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Таким образом, из факта существования потенциалов сил и перемещений следует симметрия матриц коэффициентов влияния и жесткости.

Выражения для потенциалов записываются очевидным образом:

$$\Pi = \frac{1}{2}c_{ij}q_iq_j, \quad \Phi = \frac{1}{2}\beta_{ij}F_iF_j.$$

С другой стороны, по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} q_i = \frac{1}{2} F_i q_i$$

и

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} F_i = \frac{1}{2} q_i F_i.$$

Отсюда следует, что так же, как и при простом растяжении, потенциал перемещений равен потенциалу сил и представляет собой упругую энергию U , накопленную системой.

Одновременно получили результат, составляющий содержание *теоремы Клапейрона*: потенциальная энергия упругой деформации линейной системы равна половине работы внешних сил на произведенных ими перемещениях:

$$U = \frac{1}{2} F_i q_i.$$

Из симметрии матриц c_{ij} и β_{ij} вытекает *теорема о взаимности работ Бетти*.

Пусть к стержневой системе приложена система сил F'_i , которым соответствуют перемещения q'_i , и другая система сил F''_i с перемещениями q''_i . Тогда работа сил первой системы на перемещениях, вызванных действием сил второй системы, равна работе сил второй системы на перемещениях, вызванных действием сил первой системы:

$$F'_i q''_i = F''_i q'_i.$$

Для доказательства преобразуем

$$F'_i q''_i = c_{ij} q'_j q''_i = c_{ji} q'_j q''_i = F''_j q'_j.$$

4.5. Статически неопределимые системы. Экстремальные принципы

Принцип Лагранжа. Представим стержневую систему, на которую действует одна обобщенная сила F , вызывающая обобщенное перемещение q . Сделанное предположение не нарушает общности рассуждений, так как любая система сил может рассматриваться как одна обобщенная сила. Кроме перемещения q узлы системы получают перемещения x_i ($i = 1, \dots, n$), на которых сила F работы не производит. Перемещения x_i не связаны какими-либо кинематическими ограничениями (приложив надлежащим образом обобщенные силы X_i , можно получить произвольные величины x_i). Задание системы перемещений q, x_i позволяет вычислить деформации всех элементов системы и, следовательно, найти потенциал U как функцию q и x_i :

$$U = U(q, x_i).$$

Дифференцируя U по x_i , найдем обобщенные силы X_i , но в действительности этих сил нет, поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0. \quad (12)$$

Это уравнение позволяет найти x_i как функции q . После этого, если нужно найти связь между F и q , следует воспользоваться формулой

$$F = \frac{\partial U}{\partial q}. \quad (13)$$

Конечно, при выводе необязательно и не всегда удобно выражать всю заданную нагрузку как одну обобщенную силу. Обычно эти силы рассматривают по отдельности и соответственно получают несколько уравнений вида (13).

Если система была статически определимой, то, по существу, уравнения (12) представляют собой уравнения равновесия, полученные из начала возможных перемещений. Но статическая определимость или неопределимость системы не имеет никакого значения при использовании (12).

Условие (12) говорит о том, что функция принимает стационарное значение. Убедимся, что это значение есть минимум. Действительно, вторая вариация функции $U(x_i)$ равна:

$$\delta^2 U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j = \frac{1}{2} c_{ij} \delta x_i \delta x_j.$$

Но это есть упругая энергия системы, вычисленная для перемещений $\delta x_i, \delta x_j$. Упругая энергия всегда положительна, она обращается в ноль только при $\delta x_i \equiv 0$, следовательно, $\delta^2 U > 0$. Это и есть условие минимума функции $U(x_i)$.

Принцип Кастильяно. Рассмотрим произвольную стержневую систему, p раз статически неопределимую. Это значит, что разрушив p связей, она превратится в статически определимую. Таким образом, вводится p неизвестных реакций связей X_1, \dots, X_p . Через «лишние» неизвестные X_i можно выразить усилия и моменты во всех элементах системы. Таким образом, потенциал Φ будет функцией X_i . Принцип Кастильяно состоит в том, что величина Φ , рассматриваемая как функция лишних неизвестных, имеет минимум для тех значений этих неизвестных, которые существуют в действительности.

По теореме Кастильяно

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = 0 (i = 1, \dots, p). \quad (14)$$

Это условия экстремума функции Φ . Покажем, что этот экстремум есть минимум.

Для этого находим вторую вариацию функции

$$\delta^2\Phi = \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial X_i \partial X_j} \delta X_i \delta X_j.$$

Но $\frac{\partial^2\Phi}{\partial X_i \partial X_j} = \beta_{ij}$. Поэтому

$$\delta^2\Phi = \frac{1}{2} \beta_{ij} \delta X_i \delta X_j.$$

Итак, $\delta^2\Phi$ есть упругая энергия. Но упругая энергия является положительно определенной формой, так как нельзя приложить к системе такие силы, которые делали бы отрицательной ее энергию. Поэтому $\delta^2\Phi > 0$ и уравнения (14) (т. е. имеем минимум) представляют условия минимума потенциальной энергии, рассматриваемой как функция лишних неизвестных.

Условие стационарности потенциала сил и потенциала перемещений справедливы не только для линейных систем. Однако заключение о том, что это стационарное значение есть минимум, требует выполнения дополнительных условий. Необходимое условие устойчивости равновесия по отношению к бесконечно малым возмущениям состоит в том, чтобы квадратичные формы

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} dq_i dq_j \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_i \partial F_j} dF_i dF_j$$

были положительно определенными в той точке, где $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ или $\frac{\partial \Phi}{\partial F_i} = 0$. Но если линейная система устойчива по отношению возмущений любой величины, поскольку соответствующие квадратичные формы положительны при любых значениях аргумента, для нелинейных систем точка, где достигается минимум потенциала, может быть неединственной.

4.6. Устойчивость пологой арки

В качестве примера рассмотрим модельную задачу об устойчивости пологой арки (рис. 24). В исходном состо-

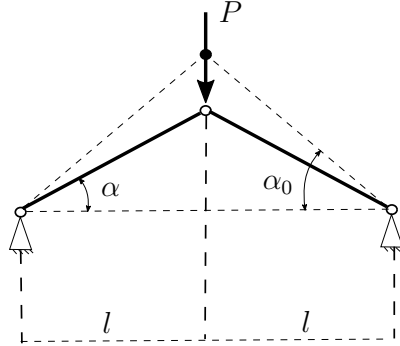


Рис. 24. Пологая арка

янии $\alpha_0 \ll 1$. В некотором промежуточном положении, достигнутом под действием силы P , $\alpha < \alpha_0$. Тогда $\sin \alpha \sim \alpha$, $\cos \alpha \sim 1 - \alpha^2/2$ (два члена разложения в ряд Тейлора в нуле). Длина стержня в исходном состоянии равна $L_0 = l/\cos \alpha_0 \sim l(1 + \alpha_0^2/2)$, после приложения силы она равна $L = l/\cos \alpha \sim l(1 + \alpha^2/2)$ ($1 + \alpha^2/2$ — два члена разложения в ряд Тейлора функции $l/\cos \alpha$). Таким образом, укорочение $\Delta l = l(\alpha_0^2 - \alpha^2)/2$ и относительная деформация $\varepsilon = (\alpha_0^2 - \alpha^2)/2$.

Удельная потенциальная энергия элемента стержня равна: $\tilde{U} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$. Энергия всей системы из двух балок $U = 2V\frac{1}{2}\sigma\varepsilon = 2SL_0\frac{1}{4}E(\alpha_0^2 - \alpha^2)^2 \cdot \frac{1}{2}$. Таким образом, потенциал имеет вид

$$U = \frac{1}{4}SL_0E(\alpha_0^2 - \alpha^2)^2. \quad (15)$$

Здесь $V = SL_0$ — объем балки; S — площадь ее поперечного сечения; E — модуль Юнга.

В данной задаче одна обобщенная сила $F = P$ и одно обобщенное перемещение $q = \alpha$. Тогда

$$F = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = -SL_0 E \alpha (\alpha_0^2 - \alpha^2) = P.$$

Очевидно, что при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm \alpha_0$ имеем $P = 0$. Следовательно, сначала сила возрастает по абсолютной величине, а начиная с некоторого момента угол α будет уменьшаться уже не при увеличении, а при уменьшении силы. Выясним, когда это произойдет. Для этого вычислим производную $\frac{dP}{d\alpha}$ и приравняем ее к нулю. Получим

$$\frac{dP}{d\alpha} = -SL_0 E (\alpha_0^2 - 3\alpha^2) = 0.$$

Отсюда $\alpha_0^2 - 3\alpha^2 = 0$ и, следовательно, $\alpha_{\text{кр}} = \pm \alpha_0 / \sqrt{3}$. Когда α достигает критического значения, сила максимальна и равна:

$$P_{\text{кр}} = -SL_0 E \left(\pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \alpha_0^3.$$

Изобразим теперь график зависимости $P - \alpha$ (рис. 25). При увеличении сжимающей силы по модулю угол α уменьшается. Когда сила становится равной критической, т. е. в точке B , равновесие перестает быть устойчивым, происходит хлопок. Стержни мгновенно переходят в положение равновесия, соответствующее точке C , когда угол α отрицателен. Теперь сила P уже не сжимает стержни, а растягивает их. Если снять нагрузку, стержни несколько сократятся и равновесие системы будет соответствовать точке D . Чтобы вернуть систему в исходное положение, нужно приложить силу противоположного направления. Когда ее значение достигнет критического (точка E), произойдет обратный хлопок — и мы попадаем в точку F , а

если снять нагрузку, то попадаем в исходную точку A . Как видно, отрезок EOB не соответствует каким-либо реально осуществимым состояниям системы. Здесь система имеет неустойчивые положения равновесия.

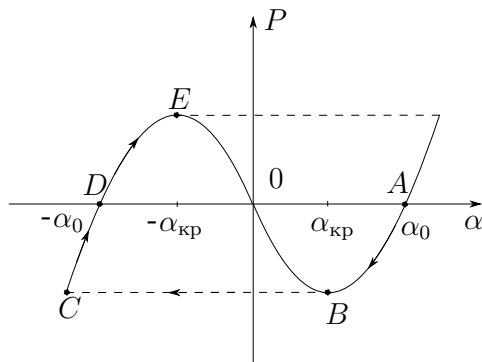


Рис. 25

Приведенные рассуждения основываются на так называемой квазистатической постановке, допускающей мгновенные перемещения точек системы на конечные расстояния. В действительности всякая материальная система обладает массой. Поэтому после достижения силой критического значения нужно составлять и интегрировать дифференциальные уравнения движения. Фактически состояние, отвечающее точке B , например, реализуется по истечении достаточного времени, когда упругие колебания вследствие тех или иных причин затухнут.

Вернемся к принципу Лагранжа для данной нелинейной системы (сила от угла зависит нелинейным образом). Энергия системы задана формулой (15). Примерный график этой функции изображен на рис. 26.

Минимальное значение U достигается при $\alpha = \pm\alpha_0$. Таким образом, при отсутствии внешней силы система имеет

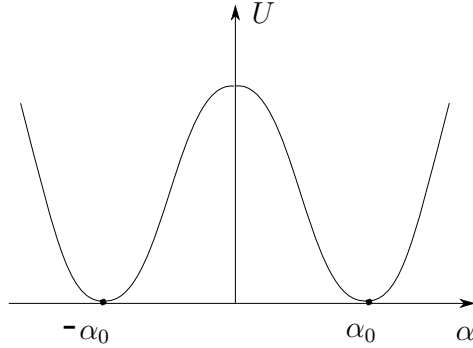


Рис. 26

два положения равновесия, разделенных потенциальным барьером $ESL_0\alpha_0^4/4$. Величина этого барьера соответствует максимуму энергии при $\alpha = 0$, в этой зоне $dU/d\alpha = 0$, но равновесие неустойчиво. Действительно, критические точки функции U , определяемые из уравнения

$$\frac{dU}{d\alpha} = -SL_0E(\alpha_0^2 - \alpha^2) = 0,$$

равны $\alpha = 0, \alpha = \alpha_0, \alpha = -\alpha_0$. Найдём значения второй производной

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = -SL_0E(\alpha_0^2 - 3\alpha^2)$$

в этих точках. При $\alpha = 0$ имеем $\frac{d^2U}{d\alpha^2} < 0$, т. е. положение равновесия неустойчивое (функция U имеет здесь максимум), при $\alpha = \pm\alpha_0$ находим, что $\frac{d^2U}{d\alpha^2} > 0$, т. е. положение равновесия устойчивое (функция U имеет здесь минимум).

5. Теория напряжений

5.1. Принцип напряжений

Важнейшей гипотезой, служащей для механического описания действия внутренних сил в деформируемом теле, является *принцип напряжений Эйлера и Коши*: в каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела, имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и распределенных по поверхности нагрузок.

Пусть деформируемое тело, которое под нагрузкой находится в равновесии, делится воображаемым сечением на две части — V_1 и V_2 (рис. 27). Отбрасывая часть V_1 , рас-

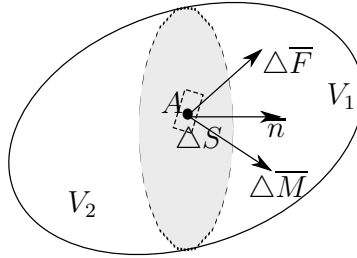


Рис. 27

смотрим элемент поверхности ΔA с центром в точке A поперечного сечения, характеризующийся единичным вектором внешней нормали \vec{n} . Согласно принципу напряжений, действие, оказываемое частью V_1 тела в точке A на часть V_2 , представляется распределенными по поверхности ΔS силами, главный вектор и главный момент которых равны $\Delta \vec{F}$ и $\Delta \vec{M}$ (рис. 27). В пределе при $\Delta S \rightarrow 0$ (при фиксированном направлении \vec{n}) могут быть приняты следующие физически обоснованные предположения:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \vec{\sigma}^n, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta S} = 0.$$

Последнее означает, что силы взаимодействия достаточно равномерно распределены по ΔS .

Вектор $\bar{\sigma}^n$ называется вектором напряжений в точке A . Он действует на элемент поверхности с направлением нормали \bar{n} . Вектор $\bar{\sigma}^n$ меняет свое направление при изменении направления нормали к ΔS , т. е. при изменении поперечного сечения. Кроме того, изменяется и длина вектора. Таким образом, векторы напряжений внутри деформируемого тела не образуют векторного поля в обычном смысле. Совокупность всех векторов напряжений $\bar{\sigma}^n(A)$ в точке для всех направлений \bar{n} (имеется бесчисленное множество таких векторов напряжений, так как через данную точку можно провести бесчисленное множество сечений) определяет напряженное состояние в точке A .

5.2. Тензор напряжений

5.2.1. Нормальные и касательные напряжения

В общем случае $\bar{\sigma}^n(P)$ не совпадает с направлением нормали \bar{n} . Проекция вектора напряжений на произвольное направление (определяемое единичным вектором) называется компонентой вектора напряжений в этом направлении.

Разложение $\bar{\sigma}^n$ на нормальную и касательную к дифференциально малому элементу плоскости сечения dS компоненты дает так называемые нормальное напряжение σ_n и касательное напряжение σ_t . Справедливо соотношение

$$|\bar{\sigma}^n|^2 = \sigma_n^2 + \sigma_t^2.$$

Следует всегда помнить, что величины σ_n и σ_t , определенные подобным образом, не являются компонентами

вектора в обычном смысле. Заметим, что целесообразно касательные напряжения σ_t в плоскости элемента dS вновь раскладывать на два ортогональных направления.

5.2.2. Напряженное состояние в точке

Векторы напряжений в точке, образующие бесконечное множество, не являются независимыми друг от друга. Они могут быть вычислены, если в точке A известны векторы напряжений для трех взаимно-ортогональных площадок, проходящих через эту точку. Это уже указывает на то, что служащие для описания напряженного состояния величины имеют характер компонент тензора.

В дальнейшем будем применять декартовы координаты x, y, z или соответственно x_i с базисными векторами $\bar{e}_i (i = 1, 2, 3)$. Рассмотрим в точке A бесконечно малый элемент объема со сторонами dx_1, dx_2, dx_3 . Векторы напряжений $\bar{\sigma}^i$, действующие на гранях элемента $x_i = \text{const}$, показаны на рис. 28.

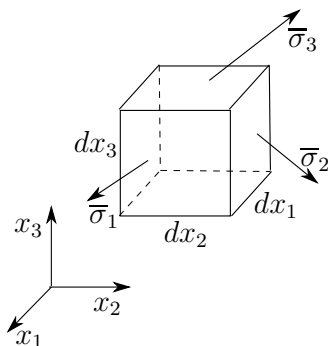


Рис. 28

При этом и последующем рассмотрении должно быть принято во внимание важное предположение о том, что

деформированный и недеформированный элементы объема идентичны. Это означает, что допускаются только малые деформации, что является естественным для линейной теории упругости.

Разложим, например, вектор напряжений $\bar{\sigma}^3$, действующий на элемент поверхности $x_3 = \text{const}$, по координатным осям x_i на три компоненты (рис. 29).

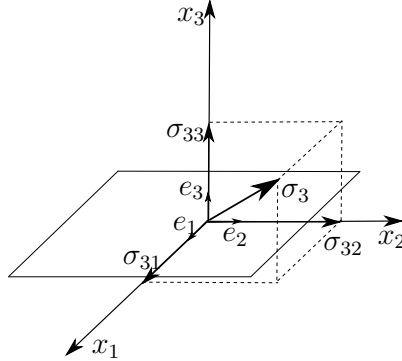


Рис. 29

Получаем

$$\bar{\sigma}^3 = \bar{e}_1 \sigma_{31} + \bar{e}_2 \sigma_{32} + \bar{e}_3 \sigma_{33} = \sum_{k=1}^3 \bar{e}_k \sigma_{3k} = \bar{e}_\alpha \sigma_{3\alpha}.$$

Здесь и ниже суммирование производится по повторяющимся индексам, которые будем обозначать греческими буквами. Тогда в общем случае

$$\bar{\sigma}^i = \bar{e}_\alpha \sigma_{i\alpha}.$$

Скалярное умножение на базисный вектор \bar{e}_k дает

$$\bar{e}_k \cdot \bar{\sigma}^i = \bar{e}_k \cdot \bar{e}_\alpha \sigma_{i\alpha} = \delta_{k\alpha} \sigma_{i\alpha},$$

где δ_{km} — символ Кронекера.

Девять компонент напряжений, заданных соотношением $\delta_{kj}\sigma_{ij}$, описывают напряженное состояние в точке деформируемого тела. Они могут быть представлены матрицей напряжений:

$$T_\sigma = \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

причем первый индекс указывает номер координатной поверхности, а второй — направление, в котором действует компонента напряжений. Наглядное изображение компонент напряжений на гранях элемента кубической формы показано на рис. 30. Величины $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ называются

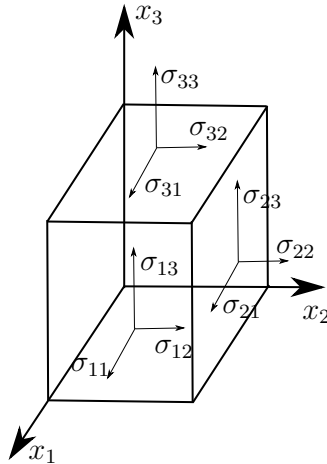


Рис. 30

нормальными напряжениями, σ_{12}, σ_{13} и т. д. — касательными напряжениями.

Девять компонент напряжений σ_{ij} представляют собой в совокупности физическую величину, которая называется *тензором напряжений Коши*. Это тензор второго ранга.

Для компонент тензора напряжений могут применяться и другие обозначения. Например, в технической литературе — $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ или $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ для нормальных напряжений, σ_{xy}, σ_{xz} и т. д. или τ_{xy}, τ_{xz} и т. д. — для касательных напряжений.

Растягивающие нормальные напряжения, совпадающие по направлению с внешней нормалью к рассматриваемой площадке, считаются положительными, сжимающие — отрицательными. За положительные направления составляющих касательного напряжения принимают положительные (отрицательные) направления осей координат, если растягивающее (сжимающее) нормальное напряжение по той же площадке имеет направление, совпадающее с положительным (отрицательным) направлением соответствующей оси.

5.2.3. Преобразование компонент тензора напряжений. Инварианты тензора напряжений

Компоненты тензора напряжений в точке, определенные в декартовых координатах $x_1x_2x_3$ с центром в данной точке, изменяются при повороте системы координат в положение $x'_1x'_2x'_3$ согласно закону преобразования тензора второго ранга, а именно

$$\sigma'_{ij} = l_{i\alpha}l_{j\beta}\sigma_{\alpha\beta} \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Здесь $l_{ij} = \cos(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$ — направляющие косинусы. Данная формула как раз и позволяет получить компоненты напряжений на гранях любых прямоугольных дифференциально малых элементов, если известны компоненты напряжений на каких-либо трех взаимно ортогональных площадках.

В частности, для плоского случая ($x_1 = x, x_2 = y$; поворот системы координат на угол α) получаются известные из элементарных теорий прочности (для случая симметрии тензора напряжений, т. е. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) формулы:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma'_{yy} = \sigma_{xx} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau'_{xy} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

При преобразовании координат получаются следующие инварианты тензора напряжений, которые представляют собой независимые от ориентации системы координат величины:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr} \sigma - \text{след тензора},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \det \sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Физическое содержание тензора напряжений выражается именно этими инвариантами. Отметим, что в случае симметричного тензора ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) имеем

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2,$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2.$$

5.2.4. Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и тензор-девиатор

Тензор напряжений, как и любой тензор второго ранга, может быть единственным образом представлен суммой

$$\sigma = \sigma_h + \sigma_d =$$

$$= \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$. Тензор σ_h называется *шаровым тензором* напряжений, тензор σ_d — *тензором-девиатором* напряжений или девиатором напряжений.

Под действием напряжений σ_0 реализуется всестороннее растяжение (или сжатие) элементарной (дифференциально малой) частицы материала. В результате происходит только изменение материального объема. Такое состояние называется гидростатическим напряженным состоянием. Тензор-девиатор напряжений реализует формоизменение материального объема.

Девиатор напряжений показывает, насколько заданное напряженное состояние уклоняется от гидростатического.

Отделение компонентов напряжений, отвечающих только за изменение объема, к которому большинство материалов чувствительно в меньшей степени, от компонентов, отвечающих за формоизменение, к которому материалы особенно чувствительны, имеет важное значение как для суждения о прочности в рассматриваемой точке, так и для описания законов деформации в окрестности той же точки тела.

Отметим, что

$$\sigma_h \cdot \sigma_d = 0.$$

Физический смысл ортогональности относительно двойного скалярного произведения шарового тензора напряжений и девиатора напряжений заключается в том, что изменение объема не приводит к изменению формы элемента, а изменение формы не ведет к изменению объема.

5.2.5. Напряжения на наклонных площадках. Условия равновесия на границе

Зная компоненты тензора напряжений в точке, можно вычислить вектор напряжений $\vec{\sigma}^n$ на произвольно ориентированной площадке dS , проходящей через эту точку.

Согласно рис. 31, выберем в качестве элемента поверхности dS малый треугольник в окрестности точки A , который образует поверхность бесконечно малого тетраэдра (остальными гранями его являются треугольники, лежащие в координатных плоскостях).

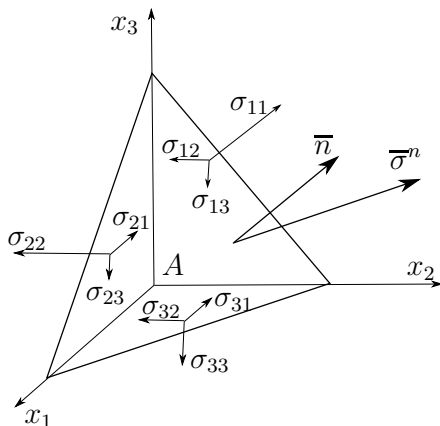


Рис. 31

Для вектора напряжений, действующего на элемент поверхности dS , справедливо равенство

$$\vec{\sigma}^n = \bar{e}_\alpha \sigma_\alpha^n.$$

Разложение нормального к dS единичного вектора имеет вид

$$\bar{n} = \bar{e}_\alpha n_\alpha,$$

и для остальных поверхностей тетраэдра (проекций элемента dS) получаются соотношения

$$dS_i = n_i dS, \quad (16)$$

причем компоненты нормали \bar{n} являются направляющими косинусами $n_i = \cos(\bar{n}, \bar{e}_i)$, удовлетворяющими условию $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

Условие равновесия сил, например, в направлении оси x_1 дает

$$\sigma_1^n dS - \sigma_{11} dS_1 - \sigma_{21} dS_2 - \sigma_{31} dS_3 = 0$$

или с учетом (16)

$$\sigma_1^n = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \sigma_{\alpha 1} n_\alpha.$$

Аналогичные уравнения получаются для остальных двух направлений. Отсюда следуют фундаментальные формулы Коши

$$\sigma_i^n = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j = \sigma_{\alpha i} n_\alpha. \quad (17)$$

Если наклонная площадка примыкает к границе, то должен выполняться непрерывный переход тензора напряжений к поверхностной нагрузке. Отсюда $\sigma_i^n = t_i$, где t_i — компоненты вектора нагрузки. Используя теперь формулу (17), получаем граничные условия в напряжениях:

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j = \sigma_{\alpha i} n_\alpha. \quad (18)$$

Следовательно, напряжения на границе (поверхностные нагрузки) находятся в равновесии с напряжениями внутри тела.

Уравнения (18) в развернутом виде для симметричного тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3, \\ t_2 &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3, \\ t_3 &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что формулы (19) можно представить в виде скалярного произведения тензора напряжений σ и вектора внешней нормали \bar{n} , а именно

$$\sigma \cdot \bar{n}|_{\Gamma} = t,$$

где Γ — поверхность, ограничивающая деформируемое тело V .

5.2.6. Уравнения равновесия в напряжениях

Рассмотрим произвольный объем V' деформированного тела ($V' \in V$), ограниченный поверхностью Γ' . На каждый элемент объема dV' действует вектор объемной силы \bar{f} , на элемент поверхности Γ' — вектор напряжений $\bar{\sigma}^n$. В силу малости деформаций полагаем, что деформированный и недеформированный объемы идентичны. Тогда равнодействующая сил, действующих на объем V' (в символической векторной форме), будет равна:

$$\bar{F} = \int_{V'} \bar{f} dV + \int_{\Gamma'} \bar{\sigma}^n d\Gamma,$$

или в скалярной форме:

$$F_i = \int_{V'} f_i dV + \int_{\Gamma'} \sigma_i^n d\Gamma.$$

Аналогично для результирующего момента приложенных сил относительно начала координат (характеризуемого радиус-вектором \bar{r}) получаем равенство

$$\bar{M} = \int_{V'} \bar{r} \times \bar{f} dV + \int_{\Gamma'} \bar{r} \times \bar{\sigma}^n d\Gamma$$

или

$$M_i = \int_{V'} \varepsilon_{i\alpha\beta} x_\alpha f_\beta dV + \int_{\Gamma'} \varepsilon_{i\alpha\beta} x_\alpha \sigma_\beta^n d\Gamma.$$

Напомним, что ε_{ijk} — компоненты тензора третьего ранга Леви–Чевита (псевдотензора). Их значения равны:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; \\ -1, & i, j, k = 1, 3, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3; \\ 0, & i = j, i = k, j = k. \end{cases}$$

Если тело V находится в равновесии, то и любой его объем, например V' , также находится в равновесии. Из условий равновесия сил и моментов следует $\bar{F} = 0$ и $\bar{M} = 0$. Тогда с учетом формул Коши (17) получим

$$\int_{V'} f_i dV + \int_{\Gamma'} \sigma_{\alpha i} n_\alpha d\Gamma = 0, \quad (20)$$

$$\int_{V'} \varepsilon_{i\alpha\beta} x_\alpha f_\beta dV + \int_{\Gamma'} \varepsilon_{i\alpha\beta} x_\alpha \sigma_{\gamma\beta} n_\gamma d\Gamma = 0. \quad (21)$$

Поверхностный интеграл может быть преобразован по формуле Гаусса–Остроградского, а именно

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} dV = \int_\Gamma \sigma_{\alpha i} n_\alpha d\Gamma.$$

Тогда, обозначая $\partial \sigma_{\alpha i} / \partial x_\alpha = \sigma_{\alpha i, \alpha}$, из (20) получаем

$$\int_{V'} (f_i + \sigma_{\alpha i, \alpha}) dV = 0. \quad (22)$$

Это соотношение справедливо для произвольной части объема деформируемого тела (или вообще для всего тела). Также подынтегральное выражение предполагалось непрерывным, уравнение (22) может быть удовлетворено только тогда, когда подынтегральная функция обращается в ноль. Отсюда следует уравнение равновесия

$$\sigma_{\alpha i, \alpha} + f_i = 0 \quad (23)$$

или в операторном виде

$$\nabla \cdot \sigma = -f. \quad (24)$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона ($\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{e}_3$). Уравнения равновесия (23) и (24) называются уравнениями Навье–Стокса.

Применяя формулы Гаусса–Остроградского к поверхностному интегралу в выражении (21), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} \varepsilon_{i\alpha\beta} x_\alpha \sigma_{\gamma\beta} n_\gamma d\Gamma &= \int_{V'} (\varepsilon_{i\alpha\beta} x_\alpha \sigma_{\gamma\beta})_{,\gamma} dV = \\ &= \int_{V'} \varepsilon_{i\alpha\beta} (x_\alpha \sigma_{\gamma\beta,\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \sigma_{\gamma\beta}) dV = \\ &= \int_{V'} \varepsilon_{i\alpha\beta} (-x_\alpha f_\beta + \sigma_{\alpha\beta}) dV. \end{aligned}$$

Здесь использованы уравнения равновесия (23), а δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда из (21) следует

$$\int_{V'} \varepsilon_{i\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} dV = 0.$$

Это равенство также справедливо для произвольного объема, поэтому из непрерывности подынтегральной функции должно следовать

$$\varepsilon_{i\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0.$$

Выполняя суммирование по греческим индексам, получим

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0$$

или $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Это означает, что тензор напряжений является симметричным. Данный результат называют законом парности касательных напряжений или теоремой Больцмана.

5.3. Исследование напряженного состояния в точке тела

5.3.1. Главные напряжения

При преобразовании компонент тензора напряжений вследствие поворота системы координат возникают два важных вопроса: при каком векторе нормали \bar{n} вектор напряжений $\bar{\sigma}^n$ будет параллелен \bar{n} и при каком \bar{n} нормальные компоненты тензора напряжений будут иметь экстремальные значения? Оба вопроса связаны с определением собственных значений тензора напряжений. Математически это сводится к преобразованию главных осей и преобразованию тензора напряжений к диагональному виду.

В каждой точке деформируемого тела существуют такие характерные направления (называемые *главными направлениями*), в которых действуют только нормальные напряжения. Ортогональные плоскости, свободные от касательных напряжений, называются *главными плоскостями*. Действующие в главных плоскостях нормальные напряжения называются *главными напряжениями*. Они

оказываются собственными значениями тензора напряжений. Координатные оси, соответствующие главным напряжениям, называются *главными осями*.

Если некоторая площадка является главной, то справедливо равенство $\vec{\sigma}^n = \sigma \cdot \vec{n}$, где σ — модуль соответствующего главного напряжения. После применения формул Коши имеем

$$\sigma_i^n = \sigma_{i\alpha} n_\alpha = \sigma n_i$$

или

$$(\sigma_{i\alpha} - \sigma \delta_{i\alpha}) n_\alpha = 0.$$

Это основное соотношение для определения собственных чисел и собственных векторов тензора напряжений. В развернутом виде это уравнение записывается так:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= 0, \\ \sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 &= 0, \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Нетривиальное решение n_1, n_2, n_3 этой линейной однородной системы уравнений существует только тогда, когда определитель системы уравнений обращается в ноль. Раскрывая этот определитель, получаем кубическое уравнение, которое называется *характеристическим уравнением тензора напряжений*. Оно имеет вид:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \tag{26}$$

где I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора напряжений. Решение уравнения (26) представляет собой собственные значения симметричного тензора напряжений. Из тензорного анализа известно, что собственные значения симметричного тензора второго ранга являются всегда вещественными числами. Три решения уравнения (26) являются

главными нормальными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Если в результате решения кубического уравнения (26) найдены главные напряжения, то, подставив каждое из найденных значений в любые два уравнения (25) и используя соотношение $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, определяем направляющие косинусы соответствующих главных площадок.

Для главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ найдем соответствующие значения направляющих косинусов $n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_3^{(1)}$; $n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, n_3^{(2)}$; $n_1^{(3)}, n_2^{(3)}, n_3^{(3)}$, которые и определяют положение главных площадок. Из тензорного исчисления известно, что три главных направления (главные оси симметричного тензора второго ранга) являются ортогональными, т. е. $n_1^{(i)} n_1^{(j)} + n_2^{(i)} n_2^{(j)} + n_3^{(i)} n_3^{(j)} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$). В частном случае, когда $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$, все направления, нормальные к плоскости напряжений σ_2 и σ_3 , являются главными направлениями. Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то все ортогональные направления будут главными (гидростатическое напряженное состояние). В системе главных осей матрица компонент тензора напряжений имеет диагональный вид, причем на главной диагонали стоят его собственные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Покажем, что главные напряжения соответствуют экстремальным значениям нормальных напряжений в данной точке. Воспользуемся способом множителей Лагранжа. При этом отыскиваются экстремальные значения функции

$$F(n_1, n_2, n_3) = \sigma_n - \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1),$$

где λ — множитель Лагранжа. Тогда условия экстремума будут иметь вид:

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial n_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial n_3} = 0. \quad (27)$$

Зная вектор напряжений $\vec{\sigma}^n$, нормальные напряжения можно определить согласно равенству $\sigma_n = \vec{\sigma}^n \cdot \vec{n}$, соответственно в тензорной форме записи при применении формул Коши

$$\sigma_n = \sigma_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta.$$

В развернутой форме

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + \\ & + 2(\sigma_{12}n_1n_2 + \sigma_{23}n_2n_3 + \sigma_{31}n_1n_3). \end{aligned}$$

Тогда соотношения (27) приводят опять к уравнениям (25).

По известным главным напряжениям и главным направлениям определяются компоненты напряжений по произвольным направлениям согласно формуле

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 n_i^{(1)} n_j^{(1)} + \sigma_2 n_i^{(2)} n_j^{(2)} + \sigma_3 n_i^{(3)} n_j^{(3)}$$

(закон преобразования, выраженный через главные напряжения).

5.3.2. Максимальные (главные) касательные напряжения

Определим такие ориентации элемента поверхности, при которых касательные напряжения σ_t достигают экстремальных значений. Расчеты при этом упрощаются, если принять в качестве координатной системы систему главных осей. Тогда компоненты вектора напряжений $\vec{\sigma}^n$ будут равны: $\sigma_i^n = \sigma_i n_i$, где σ_i — главные напряжения ($i = 1, 2, 3$). Поэтому $|\vec{\sigma}^n|^2 = (\sigma_\alpha n_\alpha)^2$, $\sigma_n = \sigma_\alpha n_\alpha^2$ и $\sigma_t^2 = (\sigma_\alpha n_\alpha)^2 - (\sigma_\alpha n_\alpha^2)^2$. С учетом условия $n_\alpha^2 = 1$ получаем выражение

$$\sigma_t^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 n_1^2 n_3^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2. \quad (28)$$

Из (28) следует, что $\sigma_t = 0$ при $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$; $n_2 = 1, n_1 = n_3 = 0$; $n_3 = 1, n_1 = n_2 = 0$. То есть главные плоскости являются свободными от касательных напряжений.

Чтобы найти направления, в которых достигаются экстремальные значения σ_t , образуем функцию G с помощью множителя Лагранжа μ в виде

$$G(n_1, n_2, n_3) = \sigma_t^2 - \mu(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1),$$

где σ_t^2 задано выражением (28), и определим ее экстремальное значение из условий

$$\frac{\partial G}{\partial n_i} = 0 (i = 1, 2, 3).$$

В результате имеем

$$n_1 [n_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_3^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \mu] = 0,$$

$$n_2 [n_1^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \mu] = 0,$$

$$n_3 [n_1^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + n_2^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \mu] = 0.$$

Эти уравнения с учетом условия $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ удовлетворяются для ряда значений:

$$n_1 = 0, n_2 = n_3 = \sqrt{2}/2, \mu = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2,$$

$$n_2 = 0, n_1 = n_3 = \sqrt{2}/2, \mu = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2,$$

$$n_3 = 0, n_1 = n_2 = \sqrt{2}/2, \mu = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2.$$

Подстановка их в (28) дает

$$\sigma_{t_1}^2 = \tau_1^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 ;$$

$$\sigma_{t_2}^2 = \tau_2^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 ;$$

$$\sigma_{t_3}^2 = \tau_3^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 .$$

Величины τ_1, τ_2, τ_3 являются экстремальными значениями касательных напряжений, так называемыми *главными касательными напряжениями*. Они действуют в плоскостях, которые параллельны одной главной оси и образуют с двумя другими угол 45° . Справедливо соотношение $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$.

Для $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ имеем максимальное значение касательного напряжения

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

которое действует в плоскости, делящей пополам угол между направлениями максимального и минимального главных напряжений.

Отметим, что поверхности, на которых действуют главные касательные напряжения, не являются ортогональными, а образуют стороны правильного додекаэдра. Эти поверхности также не свободны от нормальных напряжений. Соответствующие нормальные напряжения при этом равны:

$$\sigma_{n_1} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \sigma_{n_2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_{n_3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

5.3.3. Октаэдрические напряжения

Напряженное состояние в точке деформируемого твердого тела можно описать заданием нормальных и касательных напряжений, действующих в плоскостях, нормали к которым образуют равные углы с главными осями ($n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$). Восемь таких плоскостей образуют поверхность правильного октаэдра. Эти напряжения называют *октаэдрическими нормальными* и *октаэдрическими касательными напряжениями*.

Определяя октаэдрические нормальные напряжения, имеем

$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma_n = \sigma_\alpha n_\alpha^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3.$$

Следовательно, $\sigma_{\text{окт}}$ равняется среднему нормальному напряжению и связано с изменением объема.

По формуле (28) находим

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}.$$

Выражая $\tau_{\text{окт}}$ через произвольные компоненты напряжений, получим

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}}{3}.$$

Соответственно, через главные касательные напряжения находим

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}.$$

Октаэдрические напряжения могут быть выражены также через инварианты тензора напряжений, а именно

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} I_1, \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2}.$$

Введем еще понятие *интенсивности тензора напряжений*:

$$\sigma_i = \sqrt{3}\sqrt{I_2(\sigma_d)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}.$$

Интенсивность тензора напряжений — инвариантная величина, так как выражается через второй инвариант девиатора. Она с точностью до числового множителя совпадает с октоэдрическим касательным напряжением. Числовой коэффициент выбран так, чтобы в случае простого растяжения или сжатия ($\sigma_{11} = \sigma_1$, а остальные компоненты равны нулю) выполнялось условие $\sigma_i = |\sigma_1|$.

6. Теория деформаций

6.1. Понятие деформации

Под деформацией понимают изменение геометрических размеров тела. Рассмотрим элементарный параллелепипед и растянем его, не нарушая углов, в направлении x_1 (рис. 32). Получаем относительное удлинение ε_{11} , которое и называется *линейной деформацией*. Аналогично находим две другие деформации — $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$.

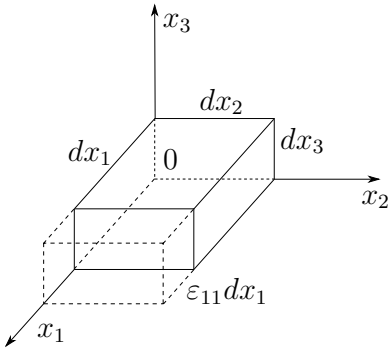


Рис. 32

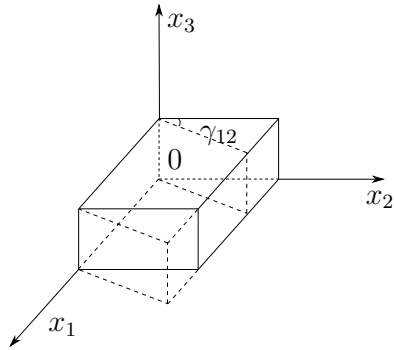


Рис. 33

Линейные деформации положительны, если имеет место удлинение ребер, и отрицательны, если укорочение. В технической литературе эти деформации обычно обозначают символами $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ или $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

При указанных деформациях изменяется только объем параллелепипеда. Элементарный объем сохраняет форму параллелепипеда. Приращение объема равно:

$$\theta = (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) - 1.$$

Если деформации малы, то их произведением можно пренебречь. Тогда $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Изменим теперь углы параллелепипеда (рис. 33). Изменение угла γ_{12} называется *деформацией сдвига* в плоскости x_1x_2 . Аналогично получаем сдвиги γ_{13}, γ_{23} . Положительному сдвигу отвечает уменьшение угла между положительными направлениями осей, отрицательному — увеличение тех же углов. В технической литературе применяют также обозначения $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \dots$ При малых сдвигах можно считать, что объем параллелепипеда не изменяется, а ребра не получают удлинений. Изменяется лишь форма параллелепипеда.

6.2. Вектор перемещений

Под действием внешних сил тело меняет свои размеры и форму, т. е. деформируется. Пусть в начальном состоянии тело занимает область V в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 34). Положение произвольной точки M тела определяется радиус-вектором \vec{r} с компонентами $x_i (i = 1, 2, 3)$ в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$.

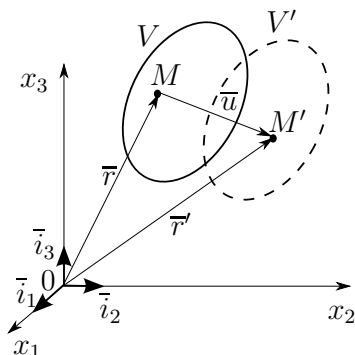


Рис. 34

Пусть в результате внешнего воздействия произошло смещение точек тела и оно заняло новую область V' (рис. 34). При этом точка $M(x_i) \in V$ сместится в положение точки $M'(x'_i) \in V'$. Здесь x'_i — координаты радиус-вектора \vec{r}' точки M' . Вектор $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} = (x'_\alpha - x_\alpha)\vec{i}_\alpha$ называется *вектором перемещения* точки M . Здесь суммирование по повторяющемуся индексу ($\alpha = 1, 2, 3$).

Каждая точка области V переместится в некоторую точку области V' . При этом тело, занявшее новую область V' , остается сплошной средой. Поэтому компоненты x'_i точек области V' должны быть непрерывными и однозначными функциями координат x_i точек в начальном состоянии:

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3). \quad (29)$$

Будем предполагать, что функции (29) имеют непрерывные производные по всем координатам и якобиан $|\partial x'_i / \partial x_k| \neq 0$, т. е. уравнение (29) можно решить относительно x_i :

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, x'_3). \quad (30)$$

Компоненты u_i вектора перемещения \vec{u} на основании (29) и (30) могут быть выражены либо как функции x_i :

$$u_i = x'_i - x_i = x'_i(x_1, x_2, x_3) - x_i = u_i(x_k), \quad (31)$$

либо как функции x'_1, x'_2, x'_3 :

$$u_i = x'_i - x_i = x'_i - x_i(x'_1, x'_2, x'_3) = u_i(x'_k). \quad (32)$$

Способ описания перемещений функциями (31), когда за независимые переменные принимаются координаты x_k точки $M(x_k)$ в начальном состоянии V , называется *лагранжевым*. Другой способ описания движения сплошной среды с помощью функций (32), в которых независимыми переменными являются координаты x'_k точек $M'(x'_k) \in V'$,

называется *способом Эйлера*. За основной параметр движения сплошной среды в способе Эйлера принимается скорость начальных точек, проходящих в каждый момент времени через рассматриваемую точку пространства. Способ Эйлера имеет преимущество в тех случаях, когда важно знать все данные о движении материальных точек сплошной среды, которые с течением времени приходят в рассматриваемое пространство. Независимые переменные Эйлера — координаты x'_k точек пространства и время используются, например, в гидромеханике. В теории упругости обычно применяется способ Лагранжа, позволяющий определить положение фиксированной материальной точки, которое она получает из начального состояния в результате внешнего воздействия на тело.

Переход тела из начального состояния V в новое состояние V' возможен вследствие перемещения тела как абсолютно твердого, т. е. без изменения расстояния между любыми двумя его точками. Такое перемещение тела называется *жестким смещением*.

Если переход в новое состояние V' связан с изменением расстояний между точками тела V , то новое состояние называется *деформированным* состоянием тела. Очевидно, что деформированное состояние тела вполне определяется, если известны функции $u_i = u_i(x_k)$.

Деформированное состояние, определяемое линейными функциями $u_i = u_i(x_k)$, называется *однородным*. Так как в этом случае функции $x'_i = x_i + u_i$ будут также линейными, то любая прямая или плоскость, которые можно вообразить в состоянии V тела, переходят в прямую или плоскость тела в состоянии V' .

6.3. Тензор деформации

При неоднородном произвольном деформировании тела функции $u_i = u_i(x_k)$ будут нелинейными. Однако и в этом случае в весьма малой окрестности любой точки тела деформированное состояние может рассматриваться как однородное, т. е. прямолинейные элементарные элементы в окрестности некоторой точки $M \in V$ преобразуются в прямолинейные элементы деформированного состояния окрестности точки $M' \in V'$.

Пусть при общем случае деформирования тела его две бесконечно близкие точки $M(x_i)$ и $N(x_i + dx_i)$, расстояние между которыми $ds = |d\vec{r}|$ в начальном состоянии V (рис. 35), перемещаются в положения $M'(x'_i)$ и $N'(x'_i + dx'_i)$ состояния V' . В результате линейный элемент $ds = |d\vec{r}|$ (отрезок MN) преобразуется в линейный элемент $ds' = |d\vec{r}'|$ (отрезок $M'N'$).

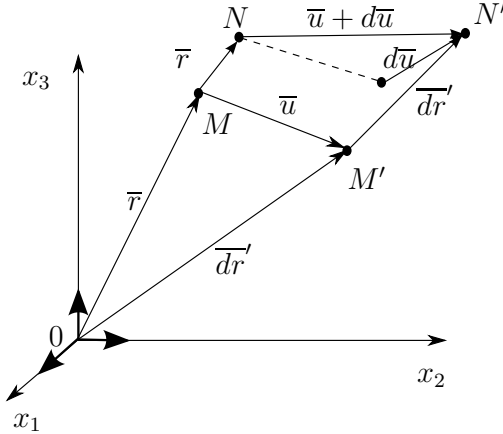


Рис. 35

Имеем $d\bar{r} = dx_\alpha \bar{i}_\alpha$, $d\bar{r}' = (dx_\alpha + du_\alpha) \bar{i}_\alpha$. Отсюда

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\bar{r}|^2 = dx_\alpha dx_\alpha, \quad ds'^2 = |d\bar{r}'|^2 = \\ &= (dx_\alpha + du_\alpha)(dx_\alpha + du_\alpha) = dx_\alpha dx_\alpha + 2dx_\alpha du_\alpha + du_\alpha du_\alpha. \end{aligned}$$

Компоненты du_i вектора $d\bar{u}$, представляющего собой вектор перемещения точки N относительно точки M , определяются как полные дифференциалы $du_i = u_{i,\alpha} dx_\alpha$. Тогда, учитывая, что

$$du_\alpha du_\alpha = du_\gamma du_\gamma = u_{\gamma,\alpha} dx_\alpha u_{\gamma,\beta} dx_\beta,$$

находим

$$\begin{aligned} ds'^2 - ds^2 &= 2u_{\alpha,\beta} dx_\beta dx_\alpha + u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta} dx_\alpha dx_\beta = \\ &= (2u_{\alpha,\beta} + u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta}) dx_\alpha dx_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (33)$$

Левая часть равенства (33), а именно $ds'^2 - ds^2$, представляет собой скаляр (инвариант, тензор нулевого ранга). Выражения $b_{ij} = dx_i dx_j$ представляют собой компоненты тензора второго ранга, а именно диадного (тензорного) произведения вектора $d\bar{r}$ на себя ($d\bar{r} \otimes d\bar{r}$). Свертка этого тензора с совокупностью чисел $(2u_{i,j} + u_{k,i} u_{k,j})$ дает в результате тензор нулевого ранга. Тогда согласно обратному тензорному признаку эта совокупность чисел образует тензор второго ранга. При этом $u_{i,j}$ являются компонентами несимметричного тензора ($u_{i,j} \neq u_{j,i}$), а $u_{k,i} u_{k,j}$ — компонентами симметричного тензора ($u_{k,i} u_{k,j} = u_{k,j} u_{k,i}$). Несимметричный тензор, через компоненты которого определяются компоненты du_i вектора относительно перемещения $d\bar{u}$, называется *тензором относительного перемещения*. Его можно разложить на сумму симметричного и кососимметричного тензоров:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} + \frac{u_{i,j} - u_{j,i}}{2}. \quad (34)$$

Далее имеют место равенства

$$\begin{aligned}
u_{\alpha,\beta}dx_\alpha dx_\beta &= 0.5 [(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})dx_\alpha dx_\beta + \\
&\quad + (u_{\alpha,\beta} - u_{\beta,\alpha})dx_\alpha dx_\beta] = \\
&= 0.5 [(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})dx_\alpha dx_\beta + + (u_{\alpha,\beta}dx_\alpha dx_\beta - \\
&\quad - u_{\beta,\alpha}dx_\alpha dx_\beta)] = 0.5 [(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})dx_\alpha dx_\beta + \\
&\quad + (u_{\alpha,\beta}dx_\alpha dx_\beta - u_{\alpha,\beta}dx_\alpha dx_\beta)] = \\
&= 0.5(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})dx_\alpha dx_\beta.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
ds^2 - ds^2 &= (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{\gamma,\alpha}u_{\gamma,\beta})dx_\alpha dx_\beta = \\
&= 2e_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta,
\end{aligned}$$

где $e_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$ — компоненты симметричного тензора второго ранга e . Эти компоненты нелинейно зависят от производных компонент вектора перемещений \bar{u} , вполне определяющего деформированное состояние тела. Поэтому тензор e называется *нелинейным тензором деформаций*.

Шесть независимых компонент симметричного тензора e_{ij} определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right]; \\
e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right]; \\
e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \\
e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right); \\
e_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right).
\end{aligned}$$

Компоненты тензора e_{ij} образуют симметричную матрицу

$$e = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}.$$

Компоненты тензора e как тензора второго ранга при повороте координатных осей преобразуются по закону

$$e'_{rs} = \gamma_{r\alpha} \gamma_{s\beta} e_{\alpha\beta},$$

где γ_{ij} — косинусы углов между осями старой и новой системы координат. Таким образом, тензор деформации полностью определяет деформированное состояние окрестности точки тела.

6.4. Представление нелинейного тензора деформации через линейный тензор деформации и тензор малого поворота

Запишем формулу (34) в виде

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

где $\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$, $\omega_{ij} = 0.5(u_{i,j} - u_{j,i})$. Тогда компоненты нелинейного тензора деформации можно записать в виде

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + (\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj})/2, \quad (35)$$

где величины ε_{ij} (так же, как и ε_{ki} и ε_{kj}) представляют собой компоненты *линеного тензора деформации*.

Запишем теперь вектор относительного перемещения в виде

$$d\bar{u} = u_{\alpha,\beta} dx_{\beta} \bar{i}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} dx_{\beta} \bar{i}_{\alpha} + \omega_{\alpha\beta} dx_{\beta} \bar{i}_{\alpha} = \varepsilon \cdot d\bar{r} + \Omega \cdot d\bar{r},$$

где Ω — кососимметричный тензор с компонентами ω_{ij} . Кососимметричный тензор можно представить вектором $\bar{\omega}$ с компонентами

$$\omega_k = -\varepsilon_{\alpha\beta k} \omega_{\alpha\beta} / 2,$$

где ε_{ijk} — тензор Леви-Чевиты. Вектор $\bar{\omega}$ называется вектором поворота. Его компоненты ω_k — углы поворота вокруг осей координат x_i . Имеем

$$\omega_1 = -\omega_{23} = \omega_{32} = (u_{3,2} - u_{2,3})/2,$$

$$\omega_2 = -\omega_{31} = \omega_{13} = (u_{1,3} - u_{3,1})/2,$$

$$\omega_3 = -\omega_{12} = \omega_{21} = (u_{2,1} - u_{1,2})/2.$$

Из этих равенств вытекает, что вектор поворота равен половине ротора вектора перемещения \bar{u} точки M тела, т. е.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{u}.$$

Тогда

$$d\bar{u} = \varepsilon \cdot d\bar{r} + \bar{\omega} \times d\bar{r}.$$

Второе слагаемое в данной формуле представляет перемещение, обусловленное поворотом бесконечно малой окрестности точки M как твердого тела, а первое определяет перемещение относительно точки M точек этой окрестности, создаваемое деформацией ε .

Таким образом, согласно равенству (35), можно представить нелинейный тензор деформации e через линейный тензор деформации ε и тензор малого поворота Ω .

6.5. Тензор малой деформации

При незначительном деформировании тела перемещения его точек малы и справедливо неравенство $|u_{i,j}| \ll 1$. Это условие допускает пренебрежение квадратами и произведениями компонент тензора $u_{i,j}$ по сравнению с их первыми степенями. При таком допущении

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ij}.$$

Отсюда в случае малых перемещений деформации будут также малыми. Тензор второго ранга с компонентами ε_{ij} является линейным тензором деформации и называется *тензором малой деформации*.

Шесть независимых компонент этого тензора определяются равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), & \\ & & \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Данные зависимости называются *дифференциальными зависимостями Коши* или *соотношениями Коши*.

Связь между компонентами тензора малой деформации и вектора перемещений можно записать в операторном виде:

$$\varepsilon = def \bar{u},$$

где оператор def определяется равенствами (36). В последующем будем рассматривать только случай малых деформаций.

6.6. Геометрический смысл компонент тензора малой деформации

Выясним геометрический смысл компонент тензора малой деформации. Для этого рассмотрим элементарный прямоугольник до и после деформации (рис. 36).

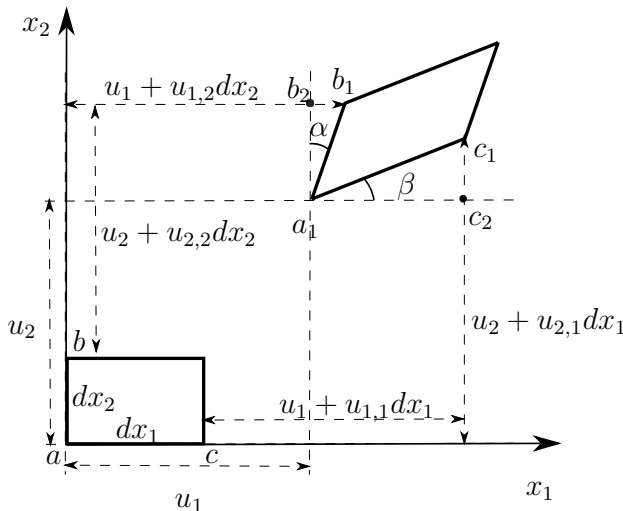


Рис. 36

При определении перемещений точек b и c , близлежащих к точке a , используем разложение в ряд Тейлора, в котором отбрасываем члены второго и высших порядков малости, т. е.

$$u'_i = u_i + u_{i,\alpha} dx_\alpha.$$

Очевидно, что при перемещении параллельно оси x_i имеем $dx_k = dx_j = 0$ ($k, j \neq i$). Тогда

$$\varepsilon_{11} = \frac{a_1 c_2 - ac}{ac} =$$

$$= \frac{(dx_1 + u_1 + u_{1,1}dx_1 - u_1) - dx_1}{dx_1} = u_{1,1}.$$

Аналогично $\varepsilon_{22} = u_{2,2}$. Следовательно, диагональные компоненты тензора малой деформации представляют собой относительные деформации, направленные по осям координат.

Далее

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{b_1 b_2}{a_1 b_2} = \frac{u_1 + u_{1,2} dx_2 - u_1}{dx_2 + u_2 + u_{2,2} dx_2 - u_2} = \\ &= \frac{u_{1,2} dx_2}{(1 + u_{2,2}) dx_2} \doteq u_{1,2}. \end{aligned}$$

Здесь $u_{2,2} \ll 1$. Аналогично $\operatorname{tg} \beta = u_{2,1}$. Так как сдвиги существенно малы, то $\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha$, $\operatorname{tg} \beta \doteq \beta$. Тогда $\gamma_{12} = \alpha + \beta = u_{1,2} + u_{2,1}$. Следовательно, $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12}$. Итак, компоненты тензора малой деформации с разными индексами представляют собой половины изменений первоначально прямых углов между соответствующими координатными осями.

6.7. Уравнения совместности деформаций

Соотношения Коши представляют собой при заданных деформациях шесть дифференциальных уравнений в частных производных для трех компонент вектора перемещений. Следовательно, имеет место переопределенность. Поэтому шесть компонент тензора малых деформаций не могут быть независимыми друг от друга. Соотношения, существующие между ними, называют уравнениями совместности или условиями неразрывности.

Уравнения совместности непосредственно получаются как математические тождества при исключении перемещений из соотношений Коши. Двукратное их дифференцирование дает

$$\varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2}(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}).$$

Путем перестановки индексов получаются три аналогичных уравнения:

$$\varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2}(u_{k,l ij} + u_{l,ki j}),$$

$$\varepsilon_{il,jk} = \frac{1}{2}(u_{i,ljk} + u_{l,ijk}),$$

$$\varepsilon_{jk,il} = \frac{1}{2}(u_{j,kil} + u_{k,jil}).$$

Ввиду предполагаемой непрерывности перемещений, а также производных и перестановочности порядка дифференцирования, линейная комбинация этих уравнений дает

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0.$$

Это выражение, представляющее в совокупности 81 уравнение, содержит шесть уравнений совместности и было получено Сен-Венаном. Часть остальных уравнений удовлетворяется тождественно, другая часть повторяется (из-за симметрии компонент деформаций и перестановочности порядка дифференцирования).

Компактная форма записи уравнений получается с помощью тензора Леви-Чевиты:

$$\varepsilon_{mlj}(\varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{jk,il}) = 0.$$

Выражение в скобках равно $\varepsilon_{nik}\varepsilon_{ij,kl}$. Тогда

$$\varepsilon_{mlj}\varepsilon_{nik}\varepsilon_{ij,kl} = 0. \quad (37)$$

В векторной форме записи это равенство принимает вид

$$\text{rotrot}\varepsilon \equiv \text{Ink}\varepsilon = 0.$$

Оператор *Ink* называется «несовместностью с...».

Как видно, выражение (37) симметрично относительно m и n , следовательно, остается только шесть независимых уравнений. Они получаются, если придать m и n значения 1,1; 2,2; 3,3; 1,2; 2,3; 1,3. В развернутой форме уравнения совместности запишутся в виде

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2} &= \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}, \\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial x_1\partial x_3} &= \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}, \\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3} &= \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}, \\ \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Данные уравнения являются необходимыми условиями того, что существует поле перемещений $u_i(x_1, x_2, x_3)$, по которому определяются деформации ε_{ij} согласно соотношениям Коши.

Физический смысл уравнений совместности заключается в следующем. Если, задаваясь деформацией, их не учитывать и для каждого из параллелепипедов, на которые мысленно разбито тело, назначить шесть независимых

составляющих деформаций, то из отдельных таких деформированных параллелепипедов нельзя сложить непрерывного (сплошного) тела. То есть тело, сплошное и непрерывное до деформации, остается сплошным и непрерывным после деформации.

6.8. Деформированное состояние в точке тела

6.8.1. Главные деформации и инварианты тензора деформации

Аналогично тому, как это было выполнено при рассмотрении тензора напряжений, можно найти, в каких направлениях имеются только линейные деформации и отсутствуют сдвиги. Эти направления соответствуют экстремальным значениям линейных деформаций, а их величины являются главными деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Они равны корням кубического уравнения (характеристического уравнения тензора деформации):

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon - J_3 = 0.$$

Здесь J_1, J_2, J_3 — инварианты тензора деформации:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}), (\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}), \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}(\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\beta\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\alpha} - 3\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\gamma}).$$

Три ортогональных главных направления находятся также аналогично тому, как это делалось для тензора напряжений. Они определяют системы главных осей деформации. Очевидно, что в материале, свойства которого не зависят от направления, направления главных напряжений и главных деформаций должны совпадать.

Первый инвариант тензора малой деформации имеет простой геометрический смысл, а именно представляет собой объемную деформацию окрестности точки тела.

6.8.2. Максимальный сдвиг, октаэдрические деформации, интенсивность деформации

Продолжая аналогию с тензором напряжений, запишем удлинения в направлении, нормальном к октаэдрическим площадкам:

$$\varepsilon_{\text{окт}} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3.$$

Для сдвига в октаэдрических плоскостях получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{окт}} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2)}}{3}. \end{aligned}$$

Для наибольшего сдвига имеем

$$\gamma_{\text{max}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

В теории пластичности большое значение имеет величина, пропорциональная октоэдрическому сдвигу:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{\text{окт}}.$$

Интенсивность деформаций является инвариантной величиной.

6.8.3. Шаровой тензор и девиатор деформации

Иногда выгодно разложить тензор деформации на шаровой тензор и девиатор:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_h + \varepsilon_d = \\ &= \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3$; ε_h — *шаровой тензор*; ε_d — *тензор-девиатор*. Шаровой тензор определяет изменение объема элементарной частицы материала. Тензор-девиатор характеризует формоизменение материального объема.

Фундаментальную роль в теории пластичности играет второй инвариант девиатора деформации:

$$\begin{aligned} J_{2d} = \frac{1}{6} [& (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + \\ & + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2)], \end{aligned}$$

причем $\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_{2d}}$.

7. Определяющие соотношения теории упругости

7.1. Обобщенный закон Гука

Деформируемое тело является замкнутой термодинамической системой, т. е. обмен массой с окружающей средой отсутствует, но существует обмен энергией. Состояние термодинамической системы в данный момент характеризуется определенным числом параметров, которые меняются вместе с изменением системы. Если в течение некоторого времени при постоянных внешних условиях эти параметры не меняются, то система находится в *термодинамически равновесном состоянии*. Равновесное состояние является устойчивым, когда процесс, вызванный малыми возмущениями внешних воздействий, возвращает систему в исходное состояние.

Совокупность последовательных состояний, через которые термодинамическая система проходит при взаимодействии с окружающей средой, называется *термодинамическим процессом*. Если система в любом промежуточном состоянии после фиксирования внешних воздействий остается неизменной (термодинамически равновесное состояние), то процесс называется *равновесным*. Равновесный процесс, который в обратном направлении проходит через те же состояния, что и в прямом, после чего тело и окружающая среда приходят в исходное состояние, называется *обратимым*.

Очевидно, что деформирование упругого тела является термодинамически равновесным обратимым процессом. Состояние малой частицы упругого тела (локальное термодинамическое состояние) полностью определяется тен-

зором деформаций, температурой T и некоторыми физическими постоянными или переменными χ_k , характеризующими механические и физико-химические свойства среды. В дальнейшем полагаем, что $\chi_1 = \varepsilon^* = \text{const}$, где тензор так называемых начальных деформаций и $\chi_k = 0$ ($k \neq 1$). Тензор ε^* определяет деформацию свободных от связей элементов материала (остаточную деформацию), которая возникает в результате различных технологических операций, и, как правило, не удовлетворяет условиям совместности, т. е. компоненты ε_{ij}^* не могут быть выражены через перемещения.

Далее, полная энергия системы состоит из внешней — кинетической энергии, связанной с движением системы как целого или ее макроскопических частей, и внутренней энергии Π , являющейся энергией всех видов движения и взаимодействия микрочастиц системы. Для равновесного состояния полная энергия совпадает с внутренней, которая является функцией параметров состояния и зависит от внешних параметров и температуры. В этом случае внутренняя энергия полностью характеризует локальное термодинамическое состояние элемента среды.

Будем рассматривать напряжения σ_{ij} как внешние силы по отношению к элементу. Если приращение напряжений происходит на $d\sigma_{ij}$, а деформаций — на $d\varepsilon_{ij}$, то работа, производимая напряжениями, равна: $dU = \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}$. При этом количество тепла в объеме, вообще говоря, изменяется на dQ .

Отметим, что величина

$$U = \int_0^{\varepsilon_{\alpha\beta}} dU = \int_0^{\varepsilon_{\alpha\beta}} \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}$$

является удельной потенциальной энергией деформаций. Рассматриваем класс материалов, для которых работа,

произведенная над элементарным объемом в замкнутом цикле по деформациям или напряжениям, равна нулю. Вследствие независимости интеграла от пути интегрирования подинтегральная функция должна быть полным дифференциалом. Функция U — это однозначная функция деформаций, она называется еще упругим потенциалом. Величина

$$U^* = \int_0^{\sigma_{\alpha\beta}} dU^* = \int_0^{\sigma_{\alpha\beta}} \varepsilon_{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta}$$

представляет собой дополнительную удельную потенциальную энергию деформации. Допущение о существовании удельной потенциальной энергии деформации находится в соответствии с предположением обратимости процессов деформации и определяет тем самым упругое поведение материалов. Эта энергия, вообще говоря, является положительно определенной величиной, а в линейной теории упругости она — квадратичная функция компонент деформации.

Теперь согласно первому началу термодинамики изменение внутренней энергии равно:

$$d\Pi = \frac{1}{\rho} dU + dQ,$$

где ρ — плотность материала; dQ — внешний приток тепла. Второе начало термодинамики утверждает существование функции состояния S , называемой энтропией, такой, что для обратимых процессов $dQ = TdS$. Таким образом,

$$d\Pi = \frac{1}{\rho} dU + TdS = \frac{1}{\rho} \sigma_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} + TdS.$$

Это выражение должно быть полным дифференциалом.

Так как внутренняя энергия есть функция деформации и энтропии, то

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad T = \frac{\partial \Pi}{\partial S}.$$

Таким образом, внутренняя энергия является термодинамическим потенциалом. С помощью преобразования Лежандра строятся другие термодинамические потенциалы, например, свободная энергия:

$$F = \Pi - TS, \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (38)$$

Заметим, что при упругом деформировании плотность материала практически не изменяется ($\rho = \text{const}$).

Рассмотрим разложение функции F в ряд, считая, что она зависит от ε и T , причем $\varepsilon = \varepsilon^* + \Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon \ll 1$, $T = T_0 + \Delta T$, $\Delta T \ll T_0$. Отбрасывая члены высшего порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} F = F_0 &+ \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right)_{\varepsilon=\varepsilon^*} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{T=T_0} (T - T_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta} \partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \right)_{\varepsilon=\varepsilon^*} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^*) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta} \partial T} \right)_{\varepsilon=\varepsilon^*, T=T_0} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) (T - T_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_{T=T_0} (T - T_0)^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Если начальное состояние выбрано так, что в этом состоянии напряжения равны нулю, т. е. $\sigma_{ij} = 0$ при $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^*$, $T = T_0$, то, используя выражение для напряжений (38), находим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \right)_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0.$$

Кроме того,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{T=T_0} = -S_0,$$

где S_0 — энтропия в начальном состоянии.

Обозначим теперь постоянные

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} \right)_{\varepsilon=\varepsilon^*} = \frac{1}{\rho} C_{ijmn}, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right)_{\varepsilon=\varepsilon^*, T=T_0} = \frac{1}{\rho} B_{ij},$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_{T=T_0} = \frac{c}{\rho}.$$

Здесь коэффициент связан с теплоемкостью при постоянных деформациях. Отсюда выражение (39) принимает вид:

$$\begin{aligned} F = F_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} C_{\alpha\beta\gamma\delta} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^*) + \\ + \frac{1}{\rho} B_{\alpha\beta} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) (T - T_0) + \frac{C}{2\rho} (T - T_0)^2 - \\ - S_0 (T - T_0). \end{aligned} \quad (40)$$

Чтобы задать конкретную модель термоупругого тела с малыми $\Delta\varepsilon$ и ΔT , необходимо задать численные значения констант C_{ijmn} , B_{ij} . Из определения C_{ijmn} видно, что эти величины симметричны по i, j и по m, n , а также не

меняются при замене i, j на m, n . Поэтому число различных C_{ijmn} не может быть больше двадцати одного. Величины B_{ij} также симметричны по i и по j , максимальное число различных B_{ij} равно шести. Следовательно, произвольное термоупругое тело в общем случае характеризуется 28 константами.

Так как $dF = d\Pi - TdS - SdT = \frac{1}{\rho}dU - SdT$, то

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad C_{ijmn} = \rho \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}}.$$

Теперь, используя выражение (40), получаем

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ij\alpha\beta} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) + B_{ij}(T - T_0). \quad (41)$$

Равенство (41) представляет собой обобщенный закон Гука для произвольного изотропного термоупругого тела в присутствии первоначальных деформаций. Разрешая уравнение (41) относительно деформаций, получаем

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \varepsilon_{ij}^* - S_{ij\alpha\beta} B_{\alpha\beta} (T - T_0). \quad (42)$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров второго ранга. Тогда согласно обратному тензорному признаку величины C_{ijmn} являются компонентами тензора четвертого ранга C модулей упругости. Следовательно, $S = C^{-1}$ также является тензором четвертого ранга. Он называется тензором модулей податливости с компонентами S_{ijmn} . Из этих же соображений величины $b_{ij} = -S_{ij\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора второго ранга B , характеризующего температурное расширение материала. И, наконец, величины B_{ij} также есть компоненты тензора второго ранга B .

Вспоминая определение двойного скалярного произведения, а именно $C \cdot \cdot \varepsilon = C_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$, запишем соотношения

закона Гука в инвариантной (тензорной) форме:

$$\sigma = C \cdot \cdot (\varepsilon - \varepsilon^*) + B(T - T_0), \quad \varepsilon = S \cdot \cdot \sigma + \varepsilon^* + b(T - T_0).$$

Если упругое тело анизотропно, то тензоры C и S называются анизотропными тензорами упругости и податливости. Очевидно, что при анизотропии постоянные C_{ijmn} и S_{ijmn} зависят от ориентации координатных осей.

Структура анизотропного тела может обладать некоторой упругой симметрией, в каждой точке тела обнаруживаются симметричные в отношении упругих свойств направления. В этих случаях оказывается возможным выбрать такую ориентацию осей координат, при которой некоторые упругие постоянные оказываются равными нулю или линейно зависящими от других упругих постоянных.

Пусть тело обладает плоскостью упругой симметрии, с которой совместим координатную плоскость x_1x_2 . Это означает, что если направление оси x_3 изменить на противоположное, т. е. сделать замену координат:

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = -x_3,$$

то упругий потенциал U не изменится. Плоскость симметрии существует, когда любому структурному элементу соответствует точно такой же элемент, расположенный симметрично относительно плоскости x_1x_2 . Поскольку при данной замене координат компоненты u_1 и u_2 вектора перемещений не меняются, то в этом случае у компонент ε_{ij} тензора деформации, где индекс "3" фигурирует один раз, изменится знак, а остальные компоненты останутся неизменными:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{23} &= -\varepsilon_{23}, \varepsilon'_{31} = -\varepsilon_{31}, \varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11}, \\ \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22}, \varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33}, \varepsilon'_{12} = \varepsilon_{12}. \end{aligned}$$

Упругий потенциал $U = \frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}$. Очевидно, что произведение $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$ будет менять знак, если среди индексов $ijkl$ индекс "3" содержится нечетное число раз. Следовательно, при этом же условии меняют знак члены, стоящие в выражении для упругого потенциала. Поэтому упругий потенциал не изменится, если компоненты C_{ijkl} тензора упругих постоянных, среди индексов которых символ "3" встречается либо один раз, либо три раза, будут равны нулю.

Таким образом, для тела с одной плоскостью упругой симметрии при указанной ориентации осей координат матрица упругих постоянных имеет вид:

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2331} & 0 \\ & & & & C_{3131} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}$$

Следовательно, у тел, имеющих одну плоскость упругой симметрии, с которой совмещается одна из координатных плоскостей, число упругих постоянных сокращается до 13.

Если тело имеет две взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, то в этом случае при совмещении с ними координатных плоскостей, например, x_1x_2 и x_1x_3 , очевидно, обращаются в ноль те упругие постоянные C_{ijkl} , в индексах которых символ "3" или символ "2" встречается нечетное число раз. Матрица упругих постоянных в этом случае равна:

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & C_{3131} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}$$

Следовательно, в данном случае число упругих постоянных будет равно 9. Из рассмотрения последней матрицы легко заметить, что при наличии у тела двух взаимно перпендикулярных плоскостей упругой симметрии (x_1x_2 и x_1x_3) обращаются в ноль также упругие постоянные C_{ijkl} , среди индексов которых встречается один или три раза символ "1". Отсюда следует, что если в теле имеют место две ортогональные плоскости упругой симметрии, то и ортогональная к ним третья плоскость также будет плоскостью упругой симметрии. Тело, обладающее тремя ортогональными плоскостями упругой симметрии, называется *ортотропным*.

Следует иметь в виду, что при наличии у тела плоскостей упругой симметрии число упругих постоянных сокращается только при совмещении координатных плоскостей с плоскостями упругой симметрии. Если координатные плоскости не совпадают, то число упругих постоянных будет равно 21, т. е. как и в общем случае анизотропного тела. Существуют и другие виды упругой симметрии.

7.2. Закон Гука для изотропного материала

Многие реальные материалы являются однородными и изотропными, т. е. их механические свойства во всех точках тела и во всех направлениях одинаковы.

В случае изотропии тензор модулей упругости C является изотропным тензором, т. е. он обладает в каждой декартовой системе координат одинаковыми компонентами. Кроме того, $C_{1111} = C_{2222} = C_{3333}$, $C_{1122} = C_{1133} = C_{2233}$, $C_{1212} = C_{1313} = C_{2323}$, причем $C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})$, остальные компоненты равны нулю, т. е. имеют место всего две независимые постоянные.

Непосредственно проверяется, что тензоры четвертого ранга $\delta_{ij}\delta_{mn}$ и $\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}$ ($i, j, m, n, = 1, 2, 3$) являются изотропными, и обобщенный изотропный тензор четвертого ранга получается в результате их линейной комбинации. Здесь δ_{ij} — компоненты единичного тензора второго ранга (δ_{ij} — символ Кронекера).

Далее в силу изотропии тензор b — шаровой тензор, $b = \alpha\delta_{ij}$, где α — коэффициент линейного расширения материала. Так как тензор ε также изотропный, то тензор B — шаровой, т. е. $B = -(C_{1111} + 2C_{1122})\alpha\delta_{ij}$.

Итак, в случае изотропии компоненты тензора модулей упругости можно записать в общем виде:

$$C_{ijmn} = \alpha_1\delta_{ij}\delta_{mn} + \alpha_2\delta_{im}\delta_{jn} + \alpha_3\delta_{in}\delta_{jm}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const}$). Для закона Гука вследствие симметрии ε_{ij} имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \alpha_1\delta_{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) + (\alpha_2 + \alpha_3)(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) - \\ & - (3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\alpha\delta_{ij}(T - T_0). \end{aligned}$$

Независимыми постоянными здесь являются α_1 и $(\alpha_2 + \alpha_3)$. Обычно вводят так называемые постоянные Ляме λ и μ , имеющие размерность поверхностных сил.

Тогда

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*) + 2\mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0), \quad (43)$$

которое подробно записывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}^* - \varepsilon_{22}^* - \varepsilon_{33}^*) + \\ &+ 2\mu (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^*) - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \text{ и т. д.,} \\ \sigma_{12} &= 2\mu (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^*) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (44)$$

Компоненты тензора модулей упругости равны:

$$C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}).$$

Отсюда $C_{1111} = \lambda + 2\mu$, $C_{1122} = \lambda$, $C_{1212} = \mu$.

Равенства (44) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu \varepsilon_{11} + 3\lambda \varepsilon_0 - 2\mu \varepsilon_{11}^* - 3\lambda \varepsilon_0^* - \\ &\quad - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0), \\ \sigma_{22} &= 2\mu \varepsilon_{22} + 3\lambda \varepsilon_0 - 2\mu \varepsilon_{22}^* - 3\lambda \varepsilon_0^* - \\ &\quad - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0), \\ \sigma_{33} &= 2\mu \varepsilon_{33} + 3\lambda \varepsilon_0 - 2\mu \varepsilon_{33}^* - 3\lambda \varepsilon_0^* - \\ &\quad - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} - 2\mu \varepsilon_{12}^*,$$

$$\sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13} - 2\mu \varepsilon_{13}^*,$$

$$\sigma_{23} = 2\mu \varepsilon_{23} - 2\mu \varepsilon_{23}^*,$$

где $3\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $3\varepsilon_0^* = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{33}^*$.

Соотношения (43) могут быть разрешены относительно деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} + \varepsilon_{ij}^* + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}.$$

В подробной записи

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\nu)}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + \\ &\quad + \varepsilon_{11}^* + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} + \varepsilon_{12}^* \text{ и т. д.}\end{aligned}\tag{46}$$

Компоненты тензора модулей податливости равны:

$$S_{ijmn} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_{ij}\delta_{mn} + \frac{1}{4\mu}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}),$$

отсюда

$$S_{1111} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, S_{1122} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, S_{1212} = \frac{1}{4\mu}.$$

Равенства (46) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} 3\sigma_0 \right] + \varepsilon_{11}^* + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{22} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} 3\sigma_0 \right] + \varepsilon_{22}^* + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} 3\sigma_0 \right] + \varepsilon_{33}^* + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} + \varepsilon_{12}^*, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{13} + \varepsilon_{13}^*, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{23} + \varepsilon_{23}^*,\end{aligned}$$

где $3\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$.

Свертывание тензоров напряжений, а именно приравнивание индексов $i = j$ и последующее суммирование в выражениях (43) (сложение первых трех равенств в выражениях (45) и последующее преобразование) приводит к формуле

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= (3\lambda + 2\mu)[\varepsilon_0 - \varepsilon_0^* - \alpha(T - T_0)] = \\ &= K[\varepsilon_0 - \varepsilon_0^* - \alpha(T - T_0)],\end{aligned}\quad (47)$$

связывающей компоненты шаровых тензоров напряжений и деформаций.

Вычитая из левой и правой частей первых трех уравнений в выражениях (45) величину σ_0 и проводя необходимые преобразования с учетом равенства (47), получаем связь между девиаторами напряжений и деформаций:

$$\sigma_d = 2\mu\varepsilon_d$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_{11} - \sigma_0 &= 2\mu[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0) - (\varepsilon_{11}^* - \varepsilon_0^*)], \\ \sigma_{22} - \sigma_0 &= 2\mu[(\varepsilon_{22} - \varepsilon_0) - (\varepsilon_{22}^* - \varepsilon_0^*)], \\ \sigma_{33} - \sigma_0 &= 2\mu[(\varepsilon_{33} - \varepsilon_0) - (\varepsilon_{22}^* - \varepsilon_0^*)], \\ \sigma_{12} &= 2\mu(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^*), \sigma_{13} = 2\mu(\varepsilon_{13} - \varepsilon_{13}^*), \\ \sigma_{23} &= 2\mu(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^*).\end{aligned}$$

Вместо упругих постоянных Ляме часто применяют так называемые технические постоянные — модуль продольной упругости E (модуль Юнга) и коэффициент Пуассона ν , определяемые из экспериментов.

Из опытов на простое растяжение вдоль оси x_1 получаем зависимость $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$. Подставляя значения

$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ в первые три уравнения (45), где $i = j$, и разрешая их, получим

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu} \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_{11}.$$

Отсюда $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$.

Кроме того, экспериментально установлено, что при одноосном растяжении имеет место поперечная деформация, равная $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}$. Тогда $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$. Постоянные Ляме при этом равны:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

И наконец, подставляя в выражение для удельной потенциальной энергии (упругий потенциал) значения σ_{ij} напряжений из закона Гука, получаем

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} K (3\varepsilon_0)^2 + G (\varepsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_0)^2.$$

Первое слагаемое представляет собой удельную энергию изменения объема, второе — удельную энергию формоизменения. Так как функция U является положительно определенной ($U > 0$), то

$$K > 0, G > 0.$$

Отсюда

$$K = \frac{E}{1 - 2\nu} > 0, E > 0.$$

Следовательно, $\nu < 0.5$. Далее

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} > 0.$$

Тогда $-1 < \nu$. Таким образом, $-1 < \nu < 0.5$. Для реальных материалов, которые при растяжении сужаются, значение коэффициента ν удовлетворяет неравенству $0 < \nu < 0.5$.

7.3. Положительная определенность изотропного тензора модулей упругости

Рассмотрим изотропный однородный тензор модулей упругости:

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа соответствующей матрицы, т. е. решим уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2\mu - k & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - k & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu - k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и производя необходимые преобразования, получаем уравнение

$$(\mu - k)^3 [-k^3 + (3\lambda + 6\mu)k^2 - (12\lambda\mu + 12\mu^2)k + (12\lambda\mu^2 + 8\mu^3)] = 0.$$

Корни этого уравнения (собственные числа тензора модулей упругости) равны:

$$k_1 = k_2 = k_3 = \mu, k_4 = k_5 = 2\mu, k_6 = 3\lambda + 2\mu.$$

Все эти корни положительные, следовательно, тензор является положительно определенным.

Также можно использовать критерий Сильвестра, по которому следует найти знаки определителей:

$$\lambda + 2\mu, \quad \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Имеем $\lambda + 2\mu, 4\mu(\lambda + \mu), 4\mu^2(3\lambda + 2\mu), 4\mu^3(3\lambda + 2\mu), 4\mu^4(3\lambda + 2\mu), 4\mu^5(3\lambda + 2\mu)$. Все эти числа положительны. Следовательно, согласно критерию Сильвестра, тензор является положительно определенным.

7.4. Изометрия

Имеем два шестимерных евклидовых пространства E_ε^6 и E_σ^6 соответственно симметричных тензоров второго ранга деформаций ε и напряжений σ . Пусть некоторый тензор четвертого ранга K отображает элементы пространства E_ε^6 в элементы пространства $E_\sigma^6 : E_\varepsilon^6 \rightarrow E_\sigma^6$ по правилу $\sigma = R \cdot \varepsilon$. Найдем такой тензор R , при котором сохраняются величина потенциальной энергии. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\int_V \sigma \cdots S \cdots \sigma dV = \int_V (R \cdots \varepsilon) \cdots S \cdots (R \cdots \varepsilon) dV = \int_V \varepsilon \cdots C \cdots \varepsilon dV.$$

Очевидно, что это равенство выполняется тогда, когда $R = C$. Таким образом, можно сказать, что оператор C осуществляет изометрию между пространствами E_ε^6 и E_σ^6 . Точно так же можно показать, что оператор S осуществляет изометрию между E_σ^6 и E_ε^6 .

Здесь изометрия понимается в смысле сохранения энергии.

8. Основные уравнения теории упругости

8.1. Краевые (граничные) задачи

Для решения задач теории упругости, т. е. для определения 15 неизвестных функций $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, имеются в распоряжении следующие уравнения:

уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad (48)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon = def u, \quad (49)$$

физические соотношения

$$\sigma = C \cdot \cdot (\varepsilon - \varepsilon^*) + B(T - T_0) \quad (50)$$

или

$$\varepsilon = S \cdot \cdot \sigma + b(T - T_0).$$

Таким образом, имеем 15 линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В некоторых случаях добавляют еще условия совместности

$$Ink \varepsilon = rot rot \varepsilon = 0. \quad (51)$$

Состояние равновесия упругого тела известно, если в каждой его точке известны компоненты тензоров напряжений и деформаций. Напряжения во внутренних точках тела при этом должны непрерывно переходить в напряжения на поверхности, т. е. должны быть справедливы соотношения

$$\sigma \cdot n|_{\Gamma} = t, \quad (52)$$

где t — вектор внешних сил. Вместо вектора напряжений, который задает граничные условия (52) на поверхности тела, на границе может быть задан вектор перемещений

$$n|_{\Gamma} = u^{\Gamma} . \quad (53)$$

Различают два типа граничных задач. Первая задача состоит в определении напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если известно распределение сил на поверхности. Вторая граничная задача состоит в определении напряжений и перемещений внутри упругого тела в состоянии равновесия, если известны перемещения точек поверхности.

Наряду с ними встречается их комбинация, так называемая третья, или смешанная, задача, когда на одной части поверхности заданы поверхностные силы, а на остальной части — перемещения точек поверхности.

Заметим, что объемные и поверхностные силы не могут быть заданы произвольно, так как должны удовлетворяться интегральные условия равновесия тела.

Таким образом, можно считать, что краевая задача теории упругости представляет собой задачу математической физики, в которой требуется найти функции $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$, удовлетворяющие в области V дифференциальным уравнениям (48)–(50), а на границе Γ — заданным краевым условиям (52) или (53).

8.2. Краевые задачи в перемещениях и напряжениях

Для различных постановок задач естественно записывать основные дифференциальные уравнения или полностью в напряжениях, или полностью в перемещениях. Таким образом можно уменьшить число уравнений за счет исключения неизвестных функций. При этом открываются две возможности.

Исключение деформаций и напряжений позволяет получить три дифференциальных уравнения лишь относительно перемещений (уравнения Ляме). Преимущество этого подхода состоит в том, что условия совместности при этом не нужны. Исключение деформаций и перемещений при использовании условий совместности приводит к шести дифференциальным уравнениям лишь относительно напряжений (уравнения Бельтрами).

Основные уравнения в перемещениях получаются, если в уравнения равновесия (48) подставить закон Гука (50) и исключить деформации посредством (49). Материал предполагается однородным и изотропным. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= 2\mu(u_{i,i} - \varepsilon_{ii}^*) + \lambda(u_{\alpha,\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha}^*) - \\ &\quad - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0), \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \varepsilon_{ij}^* \right], \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j.\end{aligned}\tag{54}$$

Подставляя (54) в уравнения $\sigma_{i\alpha,\alpha} + f_i = 0$, получаем для первого уравнения ($i = 1$):

$$\begin{aligned}2\mu(u_{1,11} - \varepsilon_{11,1}^*) + \lambda(u_{\alpha,\alpha 1} - \varepsilon_{\alpha\alpha,1}^*) - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,1} + \\ + \mu(u_{1,21} + u_{2,12}) - 2\mu\varepsilon_{12,2}^* + \mu(u_{1,33} + u_{3,13}) - \\ - 2\mu\varepsilon_{13,3}^* + f_1 = 0\end{aligned}$$

или, преобразуя,

$$\begin{aligned}
& \mu(2u_{1,11} + u_{1,22} + u_{2,12} + u_{1,33} + u_{3,13}) + \lambda u_{\alpha,\alpha 1} - \\
& -(3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,1} - \lambda \varepsilon_{\beta\beta,1}^* - 2\mu \varepsilon_{1\gamma,\gamma}^* + f_1 = \\
& = \mu \Delta u_1 + (\lambda + \mu)(div \bar{u})_{,1} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,1} \\
& - \lambda \varepsilon_{\beta\beta,1}^* - 2\mu \varepsilon_{1\gamma,\gamma}^* + f_1 = 0.
\end{aligned}$$

Для остальных двух уравнений аналогично. Тогда получившиеся три уравнения можно записать в векторной форме следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) grad div \bar{u} = (3\lambda + 2\mu)\alpha grad T + \\
+ \lambda grad 3\varepsilon_0^* + 2\mu div \varepsilon^* - \bar{f}, \quad (55)
\end{aligned}$$

где ε^* — тензор, $3\varepsilon_0^* = \varepsilon_{11}^* + \varepsilon_{22}^* + \varepsilon_{33}^*$. Уравнение (55) — искомое уравнение Ляме.

Особое значение имеет однородная задача, когда объемные силы можно положить равными нулю. При действии объемных сил частные решения всегда можно найти. Они не должны удовлетворять граничным условиям и из-за линейности уравнений могут быть просто сложены с решением однородной задачи.

Уравнения Ляме для однородной задачи в координатной форме имеют вид:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} = 0.$$

Отсюда вытекают некоторые важные следствия. Вычисляя дивергенцию, получаем

$$u_{i,ijj} = e_{,jj} = \Delta e = 0,$$

т. е. $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — первый инвариант тензора деформаций удовлетворяет гармоническому уравнению Лапласа, следовательно, является потенциальной или гармонической функцией. Согласно зависимости $\sigma = K\varepsilon$, справедливо также соотношение

$$\Delta\sigma = 0,$$

т. е. первый инвариант тензора напряжений также является гармонической функцией. Применяя оператор Лапласа к уравнению Ляме, получим

$$u_{i,jkk} = \Delta\Delta u_i = 0,$$

т. е. компоненты вектора перемещений удовлетворяют бигармоническому уравнению и, следовательно, являются бигармоническими функциями.

Так как компоненты тензоров напряжений и деформаций являются линейными комбинациями первых производных от u_i , справедливы также соотношения

$$\Delta\Delta\sigma_{ij} = 0, \quad \Delta\Delta\varepsilon_{ij} = 0.$$

Таким образом, бигармоническое уравнение является фундаментальным дифференциальным уравнением в теории упругости.

Основные уравнения только в напряжениях получают, если в условия совместности (51) подставляется закон Гука (50) с учетом уравнений равновесия (48). Запишем (51) в виде

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} + \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0 \quad (56)$$

и подставим второе выражение из (50), полагая изотропность материала и $T = T_0, \varepsilon^* = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{il,jk} - \sigma_{jk,il} = \\ & = \frac{\nu}{1 + \nu} (\delta_{ij}\sigma_{\alpha\alpha,kl} + \delta_{kl}\sigma_{\alpha\alpha,ij} - \delta_{il}\sigma_{\alpha\alpha,jk} - \delta_{jk}\sigma_{\alpha\alpha,il}). \end{aligned} \quad (57)$$

Как и для (56), речь идет о шести линейно независимых уравнениях.

Образуя линейные комбинации из (57) свертыванием тензора, т. е. приравнивая $k = l$, и суммированием, получаем

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij,\beta\beta} + \sigma_{\beta\beta,ij} - \sigma_{i\beta,j\beta} - \sigma_{j\beta,i\beta} = \\ & = \frac{\nu}{1+\nu}(\delta_{ij}\sigma_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \delta_{\beta\beta}\sigma_{\alpha\alpha,ij} - \delta_{i\beta}\sigma_{\alpha\alpha,j\beta} - \delta_{j\beta}\sigma_{\alpha\alpha,i\beta}). \end{aligned}$$

Вследствие симметрии индексов i, j здесь также речь идет о шести независимых уравнениях.

С учетом уравнений равновесия, а именно $\sigma_{i\beta,j\beta} = -f_{i,j}$ и т. д., следует

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij,\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha,ij} + f_{i,j} + f_{\alpha,\alpha} = \\ & = \frac{\nu}{1+\nu}(\delta_{ij}\sigma_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \sigma_{\alpha\alpha,ij}). \end{aligned} \quad (58)$$

Производя свертывание по i, j , окончательно получаем соотношение между суммой напряжений и дивергенцией объемной силы $\sigma_{\alpha\alpha,\gamma\gamma} = -f_{\gamma,\gamma}$. Тогда (58) принимает вид

$$\sigma_{ij,\beta\beta} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{\alpha\alpha,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}f_{\beta,\beta} - (f_{i,j} + f_{j,i}).$$

Эти уравнения представляют собой шесть дифференциальных уравнений Митчелла для компонент тензора напряжений.

В декартовых координатах эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} & \Delta\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \\ & = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) - 2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \\ = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Для обращающихся в ноль (или постоянных) объемных сил справедливы уравнения Бельтрами:

$$\sigma_{ij,\beta\beta} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{\alpha\alpha,ij} = 0.$$

8.3. Формулировка основных уравнений в криволинейных координатах

8.3.1. Цилиндрические координаты

Для цилиндрических координат r, ϕ, z справедлива следующая связь с декартовыми координатами (рис. 37):

$$x_1 = x = r\cos\phi, \quad x_2 = y = r\sin\phi, \quad x_3 = z = z.$$

Линейный элемент задается квадратичной формой

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\phi)^2 + (dz)^2.$$

Компоненты вектора перемещений:

$$u_1 = u_r, \quad u_2 = u_\phi, \quad u_3 = u_z.$$

Компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} = \varepsilon_r, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_\phi, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_z, \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\phi}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\phi z}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{zr}.\end{aligned}$$

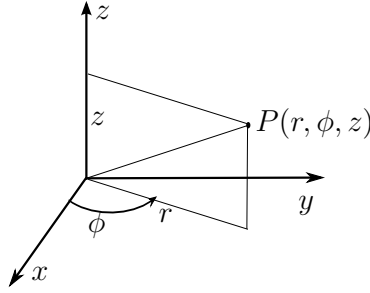


Рис. 37. Цилиндрические координаты

Далее справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right),$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right).$$

Компоненты тензора напряжений суть $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \sigma_{r\phi}, \sigma_{\phi z}, \sigma_{zr}$. Закон Гука тогда

$$\sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z) \text{ и т. д.},$$

$$\sigma_{r\phi} = 2\mu\varepsilon_{r\phi} \text{ и т. д.}$$

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_\phi}{r} + f_r = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sigma_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial z} + f_\phi = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0,$$

где f_r, f_ϕ, f_z — компоненты вектора объемных сил.

В случае наличия осевой симметрии приведенные соотношения значительно упрощаются.

8.3.2. Сферические координаты

При переходе от декартовой системы координат к сферической справедливы формулы преобразования (рис. 38):

$$x_1 = x = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$x_3 = z = r \cos \theta,$$

с квадратом линейного элемента:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Перемещения равны:

$$u_1 = u_r, \quad u_2 = u_\phi, \quad u_3 = u_\theta.$$

Деформации равны: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_r, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_\phi, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_\theta,$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{r\phi}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{\phi\theta}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{\theta r}.$$

Справедливы кинематические соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \operatorname{ctg} \theta \frac{u_\phi}{r},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right),$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right),$$

$$\varepsilon_{\phi\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right).$$

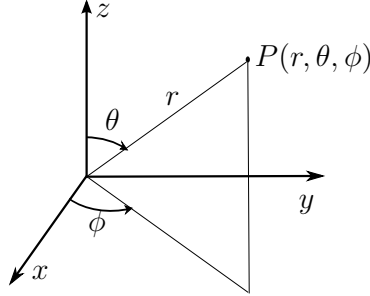


Рис. 38. Сферические координаты r, θ, ϕ

Закон Гука имеет формально такой же вид, как в цилиндрической системе координат:

$$\sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z), \sigma_{\phi\theta} = 2\mu\varepsilon_{\phi\theta},$$

$$\sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z), \sigma_{r\phi} = 2\mu\varepsilon_{r\phi},$$

$$\sigma_\phi = 2\mu\varepsilon_\phi + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z), \sigma_{\theta r} = 2\mu\varepsilon_{\theta r}.$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sigma_{r\phi} \sin \phi) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{\sigma_\phi + \sigma_\theta}{r} + f_r = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sigma_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sigma_{\phi\theta} \sin^2 \theta) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + f_\phi = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_\phi \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \phi} -$$

$$- \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \sigma_\phi + f_\theta = 0.$$

Приведенные соотношения значительно упрощаются в случае полярно-симметричного напряженно-деформированного состояния.

8.4. Прямая и обратная задачи теории упругости

Прямая задача состоит в решении основных краевых задач теории упругости, т. е. в определении функций $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и u_i , характеризующих напряженно-деформированное состояние тела в зависимости от внешнего воздействия на него.

Обратная задача состоит в том, чтобы, задавшись либо перемещениями u_i , либо компонентами тензора напряжений σ_{ij} , определить из основных уравнений и соответствующих граничных условий все остальные функции, а также внешние силы, осуществляющие заданные перемещения или напряжения.

Решение обратной задачи значительно проще, чем решение прямой задачи. Особо просто решается обратная задача, если задаться перемещениями u_i . Дифференциальные зависимости Сен-Венана удовлетворяются тождественно. Решение выполняется в следующем порядке: на основании закона Гука определяются компоненты тензора напряжений, соответствующие принятым функциям u_i , а из уравнений равновесия определяются внешние силы, при которых осуществляются заданные перемещения.

Если задаваться компонентами тензора напряжений σ_{ij} , то решение обратной задачи будет несколько сложнее. В этом случае перемещения находятся интегрированием соотношений Коши, что возможно, если компоненты тензора деформаций определяются из закона Гука по принятым функциям σ_{ij} . Следовательно, компоненты тензора напряжений надо задавать так, чтобы выполнялись условия совместности, получающиеся из дифференциальных зависимостей Сен-Венана, путем исключения функций ε_{ij} с помощью формул закона Гука (уравнения Бельтрами–Митчела).

Представим, что для определенной простой формы упругого тела при некоторых ограничениях его нагружения, задаваясь различными вариантами, например, функций σ_{ij} , определили реализующие их внешние силы. Располагая набором таких решений обратной задачи, путем их комбинирования можно подобрать функции σ_{ij} , которые будут соответствовать заданным конкретным нагрузкам, приложенным к рассматриваемому телу.

8.5. Полуобратный метод Сен-Венана

Решение прямой задачи в некоторых случаях можно эффективно получить с помощью так называемого полуобратного метода Сен-Венана. При решении конкретной задачи, например, в напряжениях, задаются из соображений физического характера задачи некоторые компоненты тензора напряжений и затем определяются остальные компоненты σ_{ij} из уравнений равновесия при выполнении условий совместности Бельтрами–Митчела.

Может случиться, что сделанные предположения о значениях некоторых компонент тензора напряжений будут противоречить или уравнениям равновесия, или условиям

совместности. В этих случаях следует сделать иные предположения о значениях части компонент σ_{ij} .

8.6. Метод суперпозиции

Предположим, что линейно-упругое тело находится в двух состояниях нагружения. В первом случае испытывает действие массовых сил f'_i при граничных условиях $\sigma'_{ij}n_j = t'_i$ на Γ_σ и $u'_i = u^{(\Gamma)}_i$ на Γ_u . Во втором случае имеем f''_i , $\sigma''_{ij}n_j = t''_i$, $u''_i = u^{(\Gamma)}_i$. Пусть $u'_i, \sigma'_{ij}, \varepsilon'_{ij}$ — решения краевой задачи для первой системы внешних нагрузок, а $u''_i, \sigma''_{ij}, \varepsilon''_{ij}$ — решения краевой задачи для второй системы внешних нагрузок. Тогда $u_i = u'_i + u''_i$, $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij}$ определяют решения краевой задачи при заданных массовых силах $f_i = f'_i + f''_i$, граничных условиях $\sigma_{ij}n_j = t'_i + t''_i$ на Γ_σ и $u_i = u^{(\Gamma)}_i + u^{(\Gamma)}_i$ на Γ_u .

8.7. Общие теоремы

8.7.1. Теорема Клапейрона

Если линейно-упругое тело при заданных объемных и поверхностных силах находится в равновесии, то энергия деформации равна половине работы, которая совершается внешними силами на перемещениях из исходного состояния равновесия в конечное.

Скалярное умножение уравнений равновесия на вектор перемещений и последующее интегрирование по объему дают

$$\int_V u_\alpha \sigma_{\alpha\beta,\beta} dV + \int_V u_\alpha f_\alpha dV = 0.$$

Далее

$$(u_i \sigma_{ij})_{,j} = u_{i,j} \sigma_{ij} + u_i \sigma_{ij,j}$$

и, следовательно,

$$\int_V (u_\alpha \sigma_{\alpha\beta})_{,\beta} dV + \int_V u_\alpha f_\alpha dV = \int_V u_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta} dV.$$

Первый интеграл в левой части преобразуется в поверхностный с помощью формулы Остроградского–Гаусса, а $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$, где ω_{ij} — компоненты кососимметричного тензора вращения (поворота). Тогда в силу симметрии тензора напряжений получаем

$$u_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}, (\omega_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0).$$

В результате имеем соотношение

$$\int_\Gamma u_\alpha \sigma_{\alpha\beta} n_\beta d\Gamma + \int_V u_\alpha f_\alpha dV = \int_V \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} dV,$$

или с учетом граничных условий

$$\int_\Gamma u_\alpha t_{\alpha\beta} d\Gamma + \int_V u_\alpha f_\alpha dV = \int_V \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} dV.$$

Таким образом, левая часть этого равенства есть работа поверхностных и объемных сил, а правая часть — удвоенная потенциальная энергия деформаций, так как $\varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}$ — удвоенная удельная энергия деформаций.

8.7.2. Теорема взаимности Бетти

С понятием работы могут быть связаны некоторые важные теоремы для линейно-упругого материала, которые полезны для приложений. Здесь речь будет идти об одной общей теореме взаимности, которая связывает друг с другом различные состояния равновесия линейно-упругого тела при разнообразных нагрузках.

Рассмотрим для упругого тела V с границей Γ два состояния равновесия, характеризующиеся величинами $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$, вызванными силами $f_i^{(1)}$ и $t_i^{(1)}$, а также $u_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$, вызванными силами $f_i^{(2)}$ и $t_i^{(2)}$.

Прежде всего справедливо тождество

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)},$$

которое может быть сразу проверено при линейном соотношении между напряжениями и деформациями $\sigma_{ij}^{(1)} = C_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$. Тогда

$$\int_V \varepsilon_{ij}^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} dV = \int_V \varepsilon_{ij}^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)} dV, \quad (59)$$

которое уже является одной из форм теоремы Бетти. Левая часть данного равенства преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta}^{(2)} + u_{\beta,\alpha}^{(2)} \right) dV &= \int_V \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha,\beta}^{(2)} dV = \\ &= \int_V \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} u_{\alpha}^{(2)} \right)_{,\beta} dV - \int_V \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} u_{\alpha}^{(2)} dV. \end{aligned}$$

С помощью теоремы Гаусса–Остроградского и уравнений равновесия получим

$$\int_V \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} dV = \int_{\Gamma} t_{\alpha}^{(1)} u_{\alpha}^{(2)} d\Gamma + \int_V f_{\alpha}^{(1)} u_{\alpha}^{(2)} dV. \quad (60)$$

Правая часть формулы (59) может быть преобразована аналогичным образом. В результате приходим к теореме Бетти:

$$\int_{\Gamma} t_{\alpha}^{(1)} u_{\alpha}^{(2)} d\Gamma + \int_V f_{\alpha}^{(1)} u_{\alpha}^{(2)} dV =$$

$$= \int_{\Gamma} t_{\alpha}^{(2)} u_{\alpha}^{(1)} d\Gamma + \int_V f_{\alpha}^{(2)} u_{\alpha}^{(1)} dV.$$

То есть *работа системы (1) внешних сил на перемещениях, вызываемых системой (2), равна работе системы (2) внешних сил на перемещениях, вызываемых системой (1).*

Значение теоремы Бетти заключается в том, что с помощью произвольно выбранной системы (2) получают соотношение между приложенными силами и перемещениями системы (1). Система (2) (вспомогательная) может быть при этом выбрана очень простой (например, однородное напряженное состояние), и тогда теорема дает объяснение различных свойств решения для системы (1).

8.7.3. Теорема о единственности решения

Предположим, что имеется две системы решений $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$, которые удовлетворяют основным уравнениям и одним и тем же граничным условиям при одинаковых объемных силах. Тогда

$$\sigma_{i\alpha,\alpha}^{(1)} = \sigma_{i\alpha,\alpha}^{(2)} = -f_i,$$

для первой граничной задачи

$$\sigma_{i\alpha}^{(1)} n_{\alpha} = \sigma_{i\alpha}^{(2)} n_{\alpha} = t_i,$$

для второй граничной задачи

$$u_i^{(1)}|_{\Gamma} = u_i^{(2)}|_{\Gamma} = u_i^{\Gamma}.$$

Ввиду линейности уравнений имеем

$$\sigma'_{i\alpha,\alpha} = \sigma_{i\alpha,\alpha}^{(1)} - \sigma_{i\alpha,\alpha}^{(2)} = 0,$$

для первой граничной задачи

$$\sigma'_{i\alpha} n_\alpha = \sigma_{i\alpha}^{(1)} n_\alpha - \sigma_{i\alpha}^{(2)} n_\alpha = 0,$$

для второй граничной задачи

$$u'_i|_\Gamma = u_i^{(1)}|_\Gamma - u_i^{(2)}|_\Gamma = 0.$$

Таким образом, разность двух данных систем решений удовлетворяет краевой задаче при нулевых объемных и поверхностных силах (первая граничная задача) или нулевых перемещениях на границе (вторая граничная задача). Тогда для разности решений теорема Клапейрона имеет вид:

$$\int_\Gamma u'_\alpha t_\alpha d\Gamma + \int_V u'_\alpha f_\alpha dV = \int_V \varepsilon'_{\alpha\beta} \sigma'_{\alpha\beta} dV,$$

где $f_\alpha = 0, t_\alpha = 0$ (первая граничная задача) или $u'_\alpha = 0$ (вторая граничная задача). Отсюда

$$\int_V \varepsilon'_{\alpha\beta} \sigma'_{\alpha\beta} dV = 0.$$

Из-за положительной определенности удельной потенциальной энергии упругой деформации это равенство может быть выполнено только для $\varepsilon'_{\alpha\beta} = 0$, а на основании закона Гука и $\sigma'_{\alpha\beta} = 0$. Следовательно, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$ и $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(2)}$, что и доказывает единственность решения.

При $\varepsilon_{ij} = 0$ в случае задачи первого типа (граничные условия заданы в напряжениях) перемещения u_i могут быть отличны от нуля и представлять собой «жесткое смещение» упругого тела. Если по условию задачи исключается «жесткое смещение» (на поверхности или ее части заданы перемещения), то и $u_i = 0$, т. е. $u'_i = u''_i$.

9. Энергетические принципы теории упругости

Все энергетические теоремы теории упругости основаны на принципе *возможной* (виртуальной) *работы*. Существуют различные интерпретации этого принципа, которые приводят к теоремам, имеющим большое значение для приложений.

Принцип был сформулирован для механики материальных точек. Он гласит: *в состоянии равновесия системы работа всех приложенных к ней сил на любом бесконечно малом изменении конфигурации системы, которое совместимо с кинематическими условиями, равна нулю.*

Принцип возможной работы состоит из двух полностью эквивалентных принципов: *принципа возможных перемещений (принцип Лагранжа)* и *принципа возможных сил (принцип Кастильяно)*. Первый принцип иногда называют принципом возможной работы, а второй — принципом возможной дополнительной работы.

9.1. Возможные перемещения, возможная работа

Рассмотрим деформируемое тело V , ограниченное поверхностью Γ . Тело находится в равновесии под действием приложенных внешних поверхностных и объемных сил. Внутри тела возникают напряжения и деформации. Исследуем поведение тела, вызванное некоторым возмущением, причем причина его не зависит от фактически приложенных сил. Точки тел испытывают так называемые возможные перемещения δu_i , следствием которых являются возможные деформации $\delta \varepsilon_{ij}$. Возможность здесь означает, что перемещения не зависят от фактически действующих

сил. Речь идет о воображаемых допустимых перемещениях, которые в действительности могут вовсе не появляться.

Возможные перемещения являются произвольными непрерывными функциями координат точки и удовлетворяют условиям совместности деформаций. Они представляют собой достаточно малые величины и поэтому не влияют на равновесие внешних сил и внутренних напряжений. Основное свойство возможных перемещений заключается в том, что они находятся в согласии с кинематическими связями, наложенными на тело. Следовательно, δu_i — кинематически допустимые функции. В остальном возможные перемещения могут быть произвольными, и можно считать, что действительные перемещения u_i получают произвольные приращения или что δu_i не имеют механического смысла.

Далее, граничные условия в общем случае задаются в виде поверхностных сил на части Γ_σ и перемещений на части Γ_u поверхности Γ . Очевидно, что $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u$, причем Γ_σ или Γ_u могут равняться нулю. Для кинематически возможных перемещений это означает, что $\delta u_i = 0$ на Γ_u (отсутствует возможное перемещение тела как целого твердого). Для возможных деформаций справедливо равенство

$$\delta \varepsilon_{ij} = 0.5 \delta(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0.5 [(\delta u_i)_{,j} + (\delta u_j)_{,i}]$$

с использованием правила перестановки

$$\delta(u_{i,j}) = (\delta u_i)_{,j}. \quad (61)$$

Возможной работой является работа, которую действительные силы совершают на возможных, т. е. мыслимых, перемещениях. При этом следует принять во внимание, что действительные силы уже полностью приложены

к телу до появления возможных перемещений. Аналогично возможная работа деформаций (возможная внутренняя работа) определяется как работа действительных внутренних напряжений на возможных деформациях.

9.2. Принцип возможных перемещений Лагранжа

Пусть для деформируемого тела выполняются уравнения равновесия $\sigma_{i\alpha,\alpha} + f_i = 0$ в объеме V и граничные условия $\sigma_{i\alpha}n_\alpha = t_i$ на Γ_σ , $u_i = 0$ на Γ_u . Считаем, что δu_i — возможные кинематически допустимые перемещения, не нарушающие граничные условия и условия совместности деформаций $\delta\varepsilon = def\delta u$. Тогда

$$(\sigma_{\gamma\alpha,\alpha} + f_\gamma)\delta u_\gamma = 0$$

или после интегрирования по объему

$$\int_V (\sigma_{\gamma\alpha,\alpha} + f_\gamma)\delta u_\gamma dV = \delta W = 0. \quad (62)$$

Покажем, что это выражение соответствует полной возможной работе. Прежде всего для первого слагаемого в (62) с учетом (61) следует

$$\sigma_{ij,j}\delta u_i = (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij}\delta u_{i,j}$$

и тогда (62) приводится к виду

$$\delta W = \int_V (\sigma_{\gamma\alpha}\delta u_\gamma)_{,\alpha} dV + \int_V f_\gamma\delta u_\gamma dV - \int_V \sigma_{\gamma\alpha}\delta u_{\gamma,\alpha} dV.$$

Применим теорему Гаусса для первого интеграла и с учетом граничных условий в напряжениях и граничного условия $\delta u_i = 0$ на Γ_u получаем

$$\int_V (\sigma_{\gamma\alpha}\delta u_\gamma)_{,\alpha} dV = \int_\Gamma \sigma_{\gamma\alpha}\delta u_\gamma n_\alpha d\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} t_\gamma\delta u_\gamma d\Gamma.$$

Далее благодаря симметрии тензора напряжений

$$\sigma_{\alpha\beta}\delta u_{\alpha,\beta} = \sigma_{\alpha\beta}0.5(\delta u_{\alpha,\beta} + \delta u_{\beta,\alpha}) = \sigma_{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Поэтому

$$\delta W = \int_{\Gamma_\sigma} t_\gamma \delta u_\gamma d\Gamma + \int_V f_\gamma \delta u_\gamma dV - \int_V \sigma_{\gamma\alpha} \delta\varepsilon_{\gamma\alpha} dV.$$

Это выражение представляет собой математическую формулировку принципа возможных перемещений для любого деформируемого тела.

Выражение

$$\int_{\Gamma_\sigma} t_\gamma \delta u_\gamma d\Gamma + \int_V f_\gamma \delta u_\gamma dV = \delta W^{(a)}$$

означает возможную работу внешних сил, а

$$\int_V \sigma_{\gamma\alpha} \delta\varepsilon_{\gamma\alpha} dV = \delta W^{(i)} -$$

возможную работу внутренних напряжений или возможную работу деформаций. Таким образом,

$$\delta W = \delta W^{(a)} - \delta W^{(i)} = 0 \quad \text{или} \quad \delta W^{(a)} = \delta W^{(i)}.$$

Итак, принцип возможных перемещений гласит: *для деформируемого тела, находящегося в состоянии равновесия, полная возможная работа внешних сил равна работе деформаций на любых кинематически допустимых перемещениях.*

Тот факт, что принцип возможных перемещений приводит к уравнениям равновесия, позволяет обратить это высказывание следующим образом. Деформируемое тело находится в состоянии равновесия тогда и только тогда,

когда для любого возможного перемещения, согласуемого с кинематическими связями, полная возможная работа внешних сил равна работе на возможных деформациях.

Отметим, что принцип справедлив для любого поведения материала, так как физические уравнения не использовались при его выводе.

Для упругого поведения материала

$$\delta W^{(i)} = \int_V \delta U dV,$$

где U — удельная потенциальная энергия упругой деформации, обладающая свойством $\partial U / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$ (упругий потенциал).

9.3. Принцип возможных сил (принцип возможной дополнительной работы)

Для этого принципа вычисляют возможную работу, которую совершают независимо от действительных сил и напряжений, отвечающих положению равновесия, так называемые возможные силы и напряжения на действующих перемещениях. В каждой точке деформируемого тела заданы перемещения и соответствующее им напряженное состояние, удовлетворяющее уравнениям $\sigma_{i\alpha,\alpha} + f_i = 0$ в V и $\sigma_{i\alpha} n_\alpha = t_i$ на Γ_σ .

В качестве возможных сил и напряжений (статически допустимых функций) рассматриваются непрерывные и однозначные функции $\delta f_i, \delta t_i, \delta \sigma_{ij}$, для которых должны быть справедливы уравнения $\sigma_{i\alpha,\alpha} + f_i = 0$ в V и $\sigma_{i\alpha} n_\alpha = t_i$ на Γ_σ . Тогда величина

$$\delta W^* = \int_V u_\gamma (\delta \sigma_{\gamma\alpha,\alpha} + \delta f_\gamma) dV = 0 \quad (63)$$

является полной возможной дополнительной работой. Для первого слагаемого

$$u_i \delta \sigma_{ij,j} = (u_i \sigma_{ij})_{,j} - u_{i,j} \delta \sigma_{ij},$$

и на основании теоремы Гаусса из (63) следует

$$\delta W^* = \int_{\Gamma} u_{\gamma} \delta t_{\gamma} d\Gamma - \int_V u_{\gamma,\alpha} \delta \sigma_{\gamma\alpha} dV + \int_V u_{\gamma} \delta f_{\gamma} dV. \quad (64)$$

Здесь величина

$$\int_{\Gamma} u_{\gamma} \delta t_{\gamma} d\Gamma + \int_V u_{\gamma} \delta f_{\gamma} dV = \delta W^{*(a)}$$

означает возможную внешнюю дополнительную работу. Для первого слагаемого

$$\int_{\Gamma} u_{\gamma} \delta t_{\gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} u_{\gamma} \delta t_{\gamma} d\Gamma,$$

так как здесь должны учитываться только такие возможные поверхностные силы, которые на Γ_{σ} (где заданы силы) обращаются в ноль. Тогда

$$\delta W^{*(a)} = \int_{\Gamma_u} u_{\gamma} \delta t_{\gamma} d\Gamma + \int_V u_{\gamma} \delta f_{\gamma} dV.$$

Благодаря симметрии $\delta \sigma_{ij}$ следует равенство

$$\int_V u_{\gamma,\alpha} \delta \sigma_{\gamma\alpha} dV = \int_V \varepsilon_{\gamma\alpha} \delta \sigma_{\gamma\alpha} dV = \delta W^{*(i)},$$

определяющее возможную дополнительную работу внутренних (возможных) сил для любого деформируемого тела. Окончательно из (64) получаем выражение

$$\delta W^* = \int_{\Gamma_u} u_{\gamma} \delta t_{\gamma} d\Gamma + \int_V u_{\gamma} \delta f_{\gamma} dV - \int_V \varepsilon_{\gamma\alpha} \delta \sigma_{\gamma\alpha} dV = 0,$$

представляющее собой математическую формулировку принципа возможных сил. Или

$$\delta W^* = \delta W^{*(a)} - \delta W^{*(i)} = 0, \quad \delta W^{*(a)} = \delta W^{*(i)}.$$

Итак, принцип возможных сил гласит: *если полная возможная дополнительная работа внешних сил равна внутренней возможной работе деформаций для любой статически допустимой системы сил и напряжений, то перемещения и деформации в деформируемом теле удовлетворяют условиям совместности и согласуются с граничными условиями.*

Отметим, что принцип справедлив вообще для любого тела, независимо от свойств материала.

9.4. Значение принципа возможной работы

Значение принципа возможной работы в обеих его формах заключается в том, что они эквивалентны основным уравнениям теории упругости.

Если подставить в принцип возможных перемещений в форме $\delta W^{(a)} = \int_V \delta U dV$ сначала соотношения Коши, а также задать геометрические граничные условия u_i на Γ_u , то из него следует уравнение равновесия и, кроме того, статические граничные условия $\sigma_{i\alpha} n_\alpha = t_i$ на Γ_σ .

Если в принцип возможных сил в форме $\delta W^{*(a)} = \int_V \delta U^* dV$, где U^* — дополнительная удельная потенциальная энергия деформаций, подставить уравнения равновесия и статические граничные условия, то из него следуют соотношения Коши и геометрические граничные условия.

Так как принцип возможной работы может быть принят в качестве основного для вариационного вывода исходных уравнений, из него можно получить важные экстремальные и соответственно минимальные принципы, из

которых следуют другие энергетические теоремы, имеющие большое практическое значение для приложений.

Эти вариационные и минимальные принципы имеют большое значение прежде всего потому, что они лежат в основе важных приближенных и численных методов решения.

Рассмотрим некоторые следствия из принципа возможной работы.

9.5. Принцип стационарности потенциальной энергии

При последующем рассмотрении в основу будет положено упругое поведение материала, т. е. будет предполагаться существование удельной потенциальной энергии деформаций $U(\varepsilon)$ и соответственно удельной дополнительной энергии деформации $U^*(\varepsilon)$ и упругих потенциалов.

Из принципа возможных перемещений

$$\int_{\Gamma_\sigma} t_\gamma \delta u_\gamma d\Gamma + \int_V f_\gamma \delta u_\gamma dV - \int_V \sigma_{\gamma\alpha} \delta \varepsilon_{\gamma\alpha} dV = 0$$

с учетом того, что силы и напряжения не варьируются, следует

$$\int_V \delta(\sigma_{\gamma\alpha} \varepsilon_{\gamma\alpha}) dV - \int_{\Gamma_\sigma} \delta(t_\gamma u_\gamma) d\Gamma - \int_V \delta(f_\gamma u_\gamma) dV = 0. \quad (65)$$

При этом $\sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = U(\varepsilon_{\alpha\beta})$ и в качестве упругого потенциала вводится накопленная в теле полная энергия обратимой деформации

$$\Pi^{(i)} = \int_V U dV.$$

Далее разность

$$- \int_{\Gamma_\sigma} t_\gamma u_\gamma d\Gamma - \int_V f_\gamma u_\gamma dV = \Pi^{(a)}$$

определяется как потенциал внешних сил. Следует заметить, что введенное выражение не соответствует работе внешних сил при переходе от ненагруженного состояния к конечному, так как t_i, f_i — истинные поверхностные и объемные силы, а u_i — произвольное поле перемещений.

Суммарный потенциал (или полная потенциальная энергия) тогда равен:

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)}.$$

Таким образом, для (65) получается более краткая формулировка:

$$\delta_\varepsilon \Pi = 0$$

(индекс при δ_ε указывает на то, что силы и напряжения не варьируются).

Итак, принцип стационарности полной потенциальной энергии гласит: *из всех допустимых перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, истинным перемещениям, которые соответствуют состоянию равновесия, отвечает стационарное значение полной потенциальной энергии.*

Или короче: *если деформируемая система находится в равновесии, то полная потенциальная энергия имеет стационарное значение.*

Можно показать, что в случае устойчивого равновесия полная потенциальная энергия принимает минимальное значение (принцип Дирихле).

В частном случае получается принцип стационарности или минимума энергии деформации, если отсутствуют объемные силы и на всей поверхности заданы перемещения. Тогда

$$\delta \Pi^{(i)} = \delta \int_V U dV = 0.$$

В заключение отметим следующее. При постановке граничных условий различают условия, заданные с самого начала (если, например, на части поверхности заданы u_i или t_i), и так называемые *естественные граничные условия*. Последние автоматически следуют из вариационного принципа: если поле перемещений u_i удовлетворяет при заданных значениях u_i^* на Γ_u вариационному принципу, то напряжения на Γ_σ , вычисленные по перемещениям u_i , должны соответствовать заданным там напряжениям t_i^* .

Тогда суммарный потенциал равен:

$$\Pi(\varepsilon) = \int_V U(\varepsilon) dV - \int_{\Gamma_\sigma} t_\gamma^* u_\gamma d\Gamma - \int_V f_\gamma u_\gamma dV.$$

Его называют *классическим функционалом теории упругости*.

9.6. Принцип стационарности дополнительной энергии

Из принципа возможных сил

$$\int_{\Gamma_u} u_\gamma \delta t_\gamma d\Gamma + \int_V u_\gamma \delta f_\gamma dV - \int_V \varepsilon_{\gamma\alpha} \delta \sigma_{\gamma\alpha} dV = 0$$

с учетом того, что перемещения не варьируются, получаем

$$\delta \int_V \varepsilon_{\gamma\alpha} \sigma_{\gamma\alpha} dV - \delta \int_{\Gamma_u} u_\gamma t_\gamma d\Gamma - \delta \int_V u_\gamma f_\gamma dV = 0, \quad (66)$$

причем теперь $\sigma_{\gamma\alpha} \varepsilon_{\gamma\alpha} = U^*(\sigma_{\gamma\alpha})$ и вводится потенциал дополнительной внутренней энергии

$$\Pi^{*(i)} = \int_V U^* dV.$$

Аналогично изложенному выше вводим

$$- \int_{\Gamma_u} u_\gamma t_\gamma d\Gamma - \int_V u_\gamma f_\gamma dV = \Pi^{*(a)}$$

и с учетом (66) получаем

$$\Pi^* = \Pi^{*(i)} + \Pi^{*(a)}.$$

Отсюда приходим к соотношению

$$\delta_\sigma \Pi^* = 0.$$

Итак, принцип стационарности дополнительной энергии гласит: *из всех сил и напряжений, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, те, которые соответствуют истинному деформированному состоянию, сообщают суммарной дополнительной потенциальной энергии стационарное значение.*

На основании этого принципа можно также заключить, что в случае устойчивого равновесия экстремальное значение Π^* соответствует минимуму.

Короче это можно выразить так: *среди всех напряженных состояний, которые удовлетворяют уравнениям равновесия, действительным является такое, для которого дополнительная энергия достигает минимума.*

В частном случае, когда объемные силы отсутствуют и силы t_i заданы на всей поверхности, имеем

$$\delta \Pi^* = \delta \Pi^{*(i)} = \delta \int_V U^* dV = 0$$

(принцип стационарности или минимума дополнительной энергии).

Функционал

$$\Pi^* = \int_V U^* dV - \int_{\Gamma_u} t_\gamma u_\gamma d\Gamma - \int_V f_\gamma u_\gamma dV$$

называют вторым классическим функционалом теории упругости, причем предполагается существование дополнительной энергии деформации и справедливость дополнительных условий $\sigma_{i\beta,\beta} + f_i = 0$ в объеме V , а также $t_i = t_i^*$ на поверхности Γ_σ .

10. Общие методы решения основных уравнений теории упругости

Общего решения, а также пригодного для всех случаев решения уравнений Ляме и Бельтрами–Митчела не существует. Однако построение этих уравнений привело к разработке многочисленных методов решений, которые широко применяются для различных задач теории упругости. Ниже рассмотрим некоторые из них.

10.1. Представление решения в форме Попковича–Нейбера

Рассмотрим уравнение Ляме

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \bar{u} + \bar{f} = 0, \quad (67)$$

полагая, что $\bar{f} = -\text{grad} \Phi$, т. е. объемные силы потенциальны. Будем искать решение уравнения Ляме в виде

$$\bar{u} = c_1 \bar{a} + c_2 \text{grad} \chi, \quad (68)$$

где \bar{a} — произвольный гармоничный вектор (проекции его на оси декартовой системы координат также удовлетворяют уравнению Лапласа), $c_1, c_2 = \text{const}$. Подставляя (68) в уравнение (67), приходим к соотношению

$$\text{grad} [c_2(\lambda + 2\mu) \Delta \chi + c_1(\lambda + \mu) \text{div} \bar{a} - \Phi] = 0,$$

которому можно удовлетворить, подчинив выбор χ уравнению

$$\Delta \chi = -\frac{c_1(\lambda + \mu) \text{div} \bar{a}}{c_2(\lambda + 2\mu)} + \frac{1}{c_2(\lambda + 2\mu)} \Phi.$$

Общее решение этого уравнения представляется суммой решения уравнения

$$\Delta\chi = -c_3 \operatorname{div} \bar{a}, \quad (69)$$

где $c_3 = c_1(\lambda + \mu)/c_2(\lambda + 2\mu)$, и какого-либо частного решения χ_0 уравнения Пуассона

$$\Delta\chi_0 = c_4\Phi, \quad (70)$$

где $c_4 = [c_2(\lambda + 2\mu)]^{-1}$.

Частное решение уравнения (69) может быть взято в виде

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{c_3}{2} \bar{r} \cdot \bar{a} = \\ &= -\frac{c_3}{2} (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3), \end{aligned}$$

что легко проверить непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= -\frac{c_3}{2} \Delta(\bar{r} \cdot \bar{a}) = \\ &= -\frac{c_3}{2} (\bar{r} \cdot \Delta\bar{a} + \bar{a} \cdot \Delta\bar{r} + 2\operatorname{div}\bar{a}) = -c_3 \operatorname{div}\bar{a}, \end{aligned}$$

так как $\bar{r} = 0$. Общее решение этого уравнения получается, если добавить произвольный гармонический скаляр $(-a_0)$. Итак,

$$\chi = -\left(\frac{c_3}{2} \bar{r} \cdot \bar{a} + a_0\right).$$

Частное решение уравнения (70) можно взять в виде

$$\begin{aligned} \chi_0(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -c_4 \int_V G(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \Phi(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3, \end{aligned}$$

где G — функция Грина оператора Лапласа.

Таким образом, искомое представление решения уравнения Ляме записывается в виде

$$\bar{u} = c_1 \bar{a} + \text{grad} \left[\frac{c_1(\lambda + \mu)}{2c_2(\lambda + 2\mu)} \bar{r} \cdot \bar{a} + a_0 \right] - \frac{\text{grad} \int_V G(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \Phi(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3}{c_2(\lambda + 2\mu)}.$$

Последнее слагаемое отбрасывается, если объемные силы отсутствуют, а при наличии непотенциальных объемных сил его следует заменить каким-либо частным решением исходного уравнения Ляме.

Представлением перемещений через гармонические функции достигается возможность использования хорошо известного «каталога» частных решений уравнения Лапласа, а иногда даже удается привести задачу теории упругости, если не целиком, то частично, к одной из классических задач теории гармонических функций. Однако трудности при этом связаны с удовлетворением граничных условий.

10.2. Принцип напряжений

10.2.1. Функции напряжений Максвелла

При применении декартовых координат вводятся три скалярные функции (функции напряжений) — U_{11}, U_{22}, U_{33} трех переменных и затем по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= U_{22,33} + U_{33,22}, & \sigma_{22} &= U_{33,11} + U_{11,33}, \\ \sigma_{33} &= U_{11,22} + U_{22,11}, & & (71) \\ \sigma_{12} &= -U_{33,12}, & \sigma_{23} &= -U_{11,23}, & \sigma_{31} &= -U_{22,13} \end{aligned}$$

находятся компоненты тензора напряжений, которые тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия.

При выборе функций напряжений остается определенный произвол. Во всяком случае, должны удовлетворяться уравнения Бельтрами

$$\sigma_{ij,\beta\beta} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{\alpha\alpha,ij} = 0.$$

После подстановки сюда выражений (71) получается

$$[(1+\nu)\Delta U_{22} - \sigma]_{,33} + [(1+\nu)\Delta U_{33} - \sigma]_{,22} = 0 \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов) или

$$-[(1+\nu)\Delta U_{33} - \sigma]_{,12} = 0 \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов). Здесь учтено, что при $i = \gamma, j = \gamma$ из уравнений Бельтрами получаем $\sigma_{,\gamma\gamma} = 0$ ($\sigma = \sigma_{\alpha\alpha}$). Отсюда с учетом свойств функции напряжений получаются три независимых соотношения:

$$\Delta U_{11} = \Delta U_{22} = \Delta U_{33} = \frac{\sigma}{1+\nu},$$

или

$$\Delta U_{11} = \Delta U_{22} = \Delta U_{33} = \frac{U_{11,11} + U_{22,22} + U_{33,33}}{2 - \nu}.$$

Из первого из этих уравнений после применения закона Гука $\varepsilon_{ij} = (\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma)/E$ следует

$$\begin{aligned} (1+\nu)(U_{11,11} - U_{22,11} - U_{33,11}) = \\ = \sigma - (1+\nu)(\sigma_{22} + \sigma_{33}) = E\varepsilon_{11}. \end{aligned}$$

Два других соответствующих уравнения получают круговой перестановкой индексов. Интегрирование этих соотношений приводит к следующему представлению для перемещений:

$$u_1 = \frac{1+\nu}{E}(U_{11} - U_{22} - U_{33})_{,1} \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов). Всегда имеются три такие функции напряжений, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и условиям совместности.

Для решения задач теории упругости функции Максвелла используются очень редко, кроме того, приведенные соображения справедливы только в декартовых координатах.

Отметим также, что функции напряжений должны еще быть таковыми, чтобы удовлетворялись соответствующие граничные условия.

10.2.2. Функции напряжений Мореры

Другая формула, также с тремя скалярными функциями напряжений — $U_{12} = U_{21}, U_{13} = U_{31}, U_{23} = U_{32}$, была предложена Морерой:

$$\sigma_{11} = -2U_{23,23} \text{ и т. д.,}$$

$$\sigma_{12} = (U_{23,1} + U_{31,2} - U_{12,3})_{,3} \text{ и т. д.}$$

(круговая перестановка индексов).

Эти функции напряжений также можно выбирать произвольно, но они должны удовлетворять уравнениям Бельтрами. Правда, построить их не так просто, как функции напряжений Максвелла. Причем данные формулы справедливы также только в декартовых координатах.

10.3. Метод Ритца

Вариационная формулировка задачи о равновесии, заключающаяся в принципе минимума потенциальной энергии системы, подсказывает возможность применения для решения задач теории упругости прямых методов вариационного исчисления.

В методе Ритца не рассматриваются дифференциальные уравнения и краевые условия, так как наперед известно, что они автоматически удовлетворяются, если найденся вектор \bar{u} , точно минимизирующий функционал

$$\Pi = \int_V \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dV - \int_V f_\gamma u_\gamma dV - \int_{\Gamma_\sigma} t_\gamma u_\gamma d\Gamma,$$

который представляет собой потенциальную энергию системы. Прием, позволяющий приближенно определить этот вектор, состоит в задании его проекций аппроксимирующими представлениями вида

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x_1, x_2, x_3) + u_{10}(x_1, x_2, x_3), \\ u_2 &= \sum_{k=1}^n a_{k+n} \phi_{k+n} + u_{20}, \\ u_3 &= \sum_{k=1}^n a_{k+2n} \phi_{k+2n} + u_{30}. \end{aligned} \quad (72)$$

Здесь u_{10}, u_{20}, u_{30} принимают на Γ_u заданные значения, тогда как функции $\phi_s (s = 1, 2, \dots, 3n)$ выбираются равными нулю на Γ_u . Этим удовлетворяются граничные условия в перемещениях на части поверхности Γ_u , где они заданы, при любых значениях коэффициентов a_s . Система аппроксимирующих (координатных) функций ϕ_s должна быть взята в столь общей форме, чтобы при достаточно большом n всякая система перемещений, удовлетворяющая граничным условиям, могла быть представлена приближенно в форме (72). Очевидно, что функции ϕ_s должны быть линейно независимыми.

После подстановки (72) в выражение потенциальной энергии системы Π последняя представится суммой квад-

ратичной и линейной форм коэффициентов a_s и постоянного слагаемого:

$$\Pi = \Pi_2(a_1, \dots, a_{3n}) - \Pi_1(a_1, \dots, a_{3n}) + \Pi_0, \quad (73)$$

причем квадратичная форма Π_2 равна как раз потенциальной энергии деформации тела V , вычисляемой по вектору $\bar{u} - \bar{u}_0$. После соответствующих преобразований форма Π_2 принимает вид

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta = \int_V U(\varepsilon - \varepsilon_0) dV,$$

и поскольку потенциальная энергия является положительно определенной формой компонент деформаций, то и Π_2 такая же форма от a_1, a_2, \dots, a_{3n} . Поэтому определитель матрицы ее компонент положителен:

$$|C_{st}| > 0. \quad (74)$$

По теореме о минимуме потенциальной энергии системы наилучшее приближение в выбранном классе аппроксимирующих вектор-функций обеспечивается значениями коэффициентов, сообщающих минимум выражению (73). Это приводит к системе из $3n$ линейных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial a_t} (\Pi_2 - \Pi_1) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, 3n$$

или

$$\sum_{s=1}^{3n} C_{st} a_s = B_t, \quad t = 1, 2, \dots, 3n.$$

Существование и единственность ее решения следует из неравенства (74).

Таким образом, строится приближенное решение задачи. Приемлемо предположение, что при достаточной общности системы аппроксимирующих функций вычисленное

значение потенциальной энергии с ростом n будет все более приближаться к ее минимуму. Вычисление дает при разумном выборе вида и числа аппроксимирующих функций значения вектора \overline{u} , достаточно близкие к точному решению. Меньшей точности следует ожидать от вычисления по найденным методом Ритца перемещениям их производных, а значит, и напряжений.

11. Плоская задача

теории упругости

Большое значение для приложений имеют задачи, в которых искомые функции зависят от двух координат. При этом различают два случая, а именно плоское деформированное и плоское напряженное состояния.

Первый случай соответствует длинному призматическому телу с продольной осью координат z , которое нагружается поверхностными силами, не зависящими от z и не имеющими составляющей в направлении оси z . При этом тело может быть или бесконечно длинным, или оно имеет конечную длину и его края соответствующим образом закреплены. Тогда в каждом поперечном сечении тела определяющим является плоское деформированное состояние.

Во втором случае речь идет о плоском теле малой толщины, которое нагружается только силами в своей плоскости, причем нормальные напряжения в направлении толщины отсутствуют. Приложенные силы или равномерно распределены по толщине, следовательно, не зависят от z (z — координата, перпендикулярная плоскости пластины), или распределены симметрично относительно так называемой срединной линии (воображаемая поверхность, делящая пополам толщину пластины). В такой пластине, которая соответствующим образом закреплена, основным является плоское напряженное состояние.

11.1. Плоское деформированное состояние

Перемещения имеют вид $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = \text{const}$ или $u_3 = 0$, кроме того, обращаются в нуль все производные по z (или x_3). При этом кинематические уравнения принимают вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0. \quad (75)$$

Остается только одно условие совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (76)$$

Нулевыми компонентами тензора напряжений являются $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, а также σ_{33} . Для закона Гука для однородного изотропного тела получаются соотношения

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})],$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})],$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G},$$

причем

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Обращение этих формул дает

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}],$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12},$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}].$$

Из уравнений равновесия остаются (без учета объемных сил)

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0. \quad (77)$$

Что касается граничных условий, то торцевые поверхности призматического тела могут быть либо свободны от напряжений ($\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3 = 0) = \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3 = l) = 0$), либо зашлемлены ($u_3(x_1, x_2, 0) = u_3(x_1, x_2, l) = 0$), здесь l — длина тела). Во втором случае силы, действующие в концевых поперечных сечениях, равны:

$$F_z = \int_S \sigma_{33} dS,$$

причем напряжения интегрируются по поперечному сечению призматического тела.

11.2. Плоское напряженное состояние

При плоском напряженном состоянии в плоскости x_1, x_2 имеются компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2),$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

Тогда компоненты перемещений u_1, u_2, u_3 вообще не зависят от x_3 ($x_3 = z$). При этом кинематические уравнения соответствуют уравнениям (75) для плоского деформированного состояния, условия совместности — уравнению (76), уравнения равновесия — уравнениям (77).

Различие между плоским деформированным состоянием и плоским напряженным состоянием проявляется при рассмотрении деформаций в законе Гука. Из него следует

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}],$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2G}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}).\end{aligned}$$

Обращение этих формул дает

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}], \\ \sigma_{12} &= 2G \varepsilon_{12},\end{aligned}$$

а также

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1 + \nu} [\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}].$$

11.3. Основные соотношения плоской задачи в полярных координатах

При переходе от плоской декартовой системы координат к полярной справедливы формулы преобразования $x_1 = r \cos \phi$, $x_2 = r \sin \phi$, а также формулы для производных

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

Компоненты перемещений будут u_r, u_ϕ , а для деформаций используют формулы

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}, \\ \varepsilon_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right),\end{aligned}\quad (78)$$

причем слагаемые u_r/r и u_ϕ/r соответствуют удлинению в окружном направлении при радиальном и соответственно окружном перемещениях.

Условия совместности деформаций имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\phi}}{\partial r \partial \phi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_{r\phi}}{\partial \phi}.$$

Для уравнений равновесия получаются выражения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\phi}}{r} = 0. \quad (79)$$

Закон Гука для плоского деформированного состояния имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_\phi \right), \\ \varepsilon_\phi &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_\phi - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_r \right), \quad \varepsilon_{r\phi} = \frac{\sigma_{r\phi}}{2G}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_r + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\phi) \right], \\ \sigma_\phi &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\varepsilon_\phi + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\phi) \right], \\ \sigma_{r\phi} &= 2G\varepsilon_{r\phi}.\end{aligned}\quad (80)$$

Для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\phi), \varepsilon_\phi = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu \sigma_r), \varepsilon_{r\phi} = \frac{\sigma_{r\phi}}{2G}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\phi), \\ \sigma_\phi &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu \varepsilon_r), \\ \sigma_{r\phi} &= 2G \varepsilon_{r\phi}. \end{aligned} \tag{81}$$

11.4. Функция напряжений Эри

Уравнения равновесия (77) тождественно удовлетворяются, если выразить напряжения через некоторую функцию $F(x_1, x_2)$ по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Эти формулы впервые были установлены Эри, и $F(x_1, x_2)$ называют функцией напряжений Эри.

Функция напряжений должна также удовлетворять условию совместности деформаций, что приводит к дифференциальному уравнению

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0,$$

которое впервые было получено Максвеллом. Это бигармоническое уравнение, а F — бигармоническая функция.

Таким образом, выбирая различные функции F , можно получить множество решений уравнения равновесия. Основная трудность при этом заключается в подборе функций, удовлетворяющих граничным условиям.

11.5. Осесимметричная задача

В случае симметричного относительно оси распределения напряжений и деформаций будет иметь место только одна радиальная компонента перемещений $u_r = u_r(r)$, все величины являются функциями только этой переменной r . Тогда из (78) следует

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_{r\phi} = 0. \quad (82)$$

Закон Гука определяется выражениями (80) или (81), где $\varepsilon_{r\phi} = \sigma_{r\phi} = 0$. Уравнения равновесия (79) приобретают вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (83)$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \frac{\sigma_\phi}{r} = 0. \quad (84)$$

Подставляя (82) в (80) или (81), а затем в (83), получаем уравнение Ляме:

$$k \left(\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} \right) = 0, \quad (85)$$

где для плоского напряженного состояния $k = E/(1 - \nu^2)$, а для плоской деформации $k = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu$.

11.6. Осесимметричное нагружение кругового кольца и толстостенной трубы (задача Ляме)

Рассмотрим толстостенную трубу с внутренним радиусом a и внешним b . Труба находится под действием внутреннего и внешнего равномерно распределенного давления

с интенсивностями соответственно p_a и p_b . Объемные силы отсутствуют.

Выразим общий интеграл уравнения Ляме (85) в виде

$$u_r = Ar + B/r.$$

Определяя по формулам (82) деформации и подставляя их в соотношения (80), получаем

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A - \frac{B}{r^2}(1-2\nu) \right],$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[A + \frac{B}{r^2}(1-2\nu) \right].$$

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_r|_{r=a} = -p_a, \sigma_r|_{r=b} = -p_b.$$

Тогда

$$A = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{E(b^2 - a^2)}(1+\nu)(1-2\nu),$$

$$B = \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{E(b^2 - a^2)}(1+\nu)$$

и

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{r^2} \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{b^2 - a^2},$$

$$\sigma_\phi = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{1}{r^2} \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (86)$$

Теперь рассмотрим круговое кольцо. Прodelывая аналогичные операции для плосконапряженного состояния, снова получаем выражение (86). Если труба находится под действием только внутреннего давления, то

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \sigma_\phi = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right).$$

Эпюры этих напряжений показаны на рис. 39. Отсюда наибольшие растягивающие напряжения, а именно σ_ϕ , имеют место на внутренней поверхности трубы:

$$(\sigma_\phi)_{\max} = p \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}, \quad \alpha = b/a > 1.$$

Видно, что уменьшение этого напряжения существенно только примерно до $\alpha = 2$. Дальнейшее увеличение наружного диаметра уже практически не сказывается на величине $(\sigma_\phi)_{\max}$.

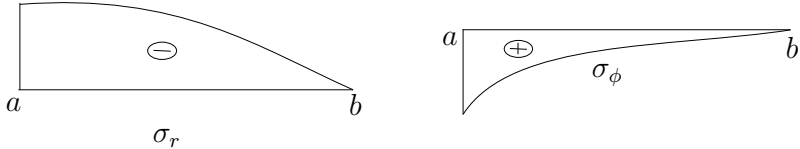


Рис. 39

11.7. Напряжения в составной трубе

Для увеличения прочности труб применяют следующую технологию. На одну трубу с внутренним радиусом a и внешним c , находящуюся в холодном состоянии, надевают вторую трубу, которая нагрета до температуры T и в этом состоянии имеет внутренний радиус c и внешний b . После охлаждения вторая труба сдавливает первую.

Задача нахождения напряжений в составной трубе представляет собой задачу определения собственных напряжений в сплошной трубе с радиусами a и b , когда в области, ограниченной радиусами c и b , имеют место первоначальные несовместные деформации

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_\phi^* = \varepsilon_z^* = \varepsilon^* = \begin{cases} 0, & a \leq r \leq c, \\ -\alpha T, & c \leq r \leq b, \end{cases}$$

где α — коэффициент температурного расширения. Физические соотношения для задачи определения собственных напряжений:

$$\sigma'' = C \cdot (\varepsilon' - \varepsilon^*),$$

в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_r'' &= 2\mu\varepsilon_r' + \lambda(\varepsilon_r' + \varepsilon_\phi') - 2\mu\varepsilon^* - \lambda(\varepsilon_r^* + \varepsilon_\theta^* + \varepsilon_z^*) = \\ &= 2\mu\varepsilon_r' + \lambda(\varepsilon_r' + \varepsilon_\phi') - (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^*, \\ \sigma_\phi'' &= 2\mu\varepsilon_\phi' + \lambda(\varepsilon_r' + \varepsilon_\phi') - (3\lambda + 2\mu)\varepsilon^*.\end{aligned}$$

Здесь $\sigma_r'', \sigma_\phi''$ — собственные напряжения, $\varepsilon_r' = \frac{du_r}{dr}$, $\varepsilon_\phi' = \frac{u_r}{r}$.

Записывая теперь уравнения Ляме, имеем

$$\left(\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d\varepsilon^*}{dr}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \varepsilon^*.$$

Решение этого уравнения:

$$u_r = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_a^r \varepsilon^* r dr + Ar + \frac{B}{r}.$$

Граничные условия определяют равенства

$$\sigma_r''|_{r=a} = 0, \sigma_r''|_{r=b} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_r''|_{r=a} &= (\lambda + 2\mu) \left(A - \frac{B}{a^2} \right) + \lambda \left(A + \frac{B}{a^2} \right) = 0, \\ \sigma_r''|_{r=b} &= (\lambda + 2\mu) \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \alpha T (b^2 - c^2) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T + \right.\end{aligned}$$

$$+A - \frac{B}{b^2} \Big] + \lambda \left[-\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \alpha T (b^2 - c^2) + A + \frac{B}{b^2} \right] + \\ + (3\lambda + 2\mu) \alpha T = 0.$$

Разрешая относительно A и B , получаем

$$A = -(1 - 2\nu) \frac{\alpha T (b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}, \quad B = -\frac{\alpha T a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 - a^2}.$$

Подставляя эти значения в выражения для напряжений, окончательно получаем

$$\sigma_r'' = \begin{cases} \frac{E\alpha T (b^2 - c^2)}{(1+\nu)(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), & a \leq r < c, \\ \frac{E\alpha T (a^2 - c^2)}{(1+\nu)(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), & c < r \leq b; \end{cases}$$

$$\sigma_\phi'' = \begin{cases} \frac{E\alpha T (b^2 - c^2)}{(1+\nu)(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), & a \leq r < c, \\ \frac{E\alpha T (a^2 - c^2)}{(1+\nu)(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), & c < r \leq b. \end{cases}$$

Эпюры данных собственных напряжений показаны на рис. 40.

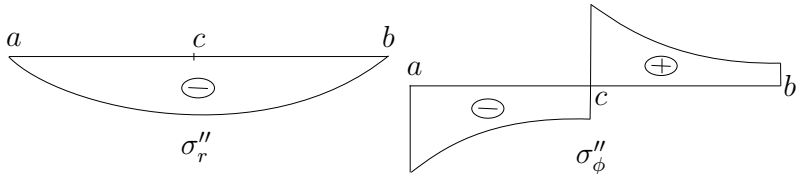


Рис. 40

Полученные напряжения уравновешены внутри тела без приложения внешних сил. Если происходит нагружение, то данные напряжения складываются с напряжениями от внешней нагрузки согласно принципу суперпозиции. Когда труба нагружена только внутренним давлением, то имеют место напряжения, эпюра которых показана на рис. 39. Они складываются с напряжениями, рассчитанными выше. Сравнивая эпюры на рис. 39 и 40, видим, что максимальное растягивающее напряжение σ_ϕ на внутренней поверхности, возникающее в результате внутреннего давления, гасится сжимающими собственными напряжениями σ''_ϕ . Следовательно, составная труба, изготовленная по указанной выше технологии, обладает большей прочностью.

11.8. Концентрация напряжений на отверстии круговой формы в пластине, растягиваемой в одном направлении (задача Кирша)

Рассмотрим пластину (рис. 41), подверженную действию растягивающего усилия, равномерно распределенного по торцам с интенсивностью σ . В центре пластина имеет небольшое круговое отверстие радиуса a . Отверстие вносит такое возмущение в однородное напряженное состояние в одноосно растянутой бесконечно протяженной пластине, что происходит повышение напряжений. Однако возмущения в распределении напряжений сказываются только в непосредственной близости от отверстия и быстро затухают уже при умеренном удалении от него ($r > 3a$). Таким образом, на большом расстоянии от начала координат определяющим является однородное распределение напряжений $\sigma_x = \sigma$ независимо от того, имеется отверстие или нет.

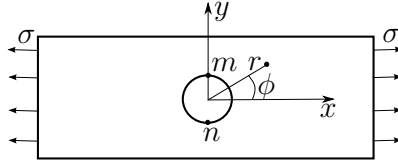


Рис. 41

Мысленно проведем вокруг отверстия окружность с достаточно большим радиусом b и сведем задачу к расчету кольца. Напряжения на внешней границе в полярных координатах:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \phi = \sigma/2(1 + \cos 2\phi), \\ \sigma_\phi &= \sigma_x \sin^2 \phi = \sigma/2(1 - \cos 2\phi), \\ \sigma_{r\phi} &= -\sigma_x \sin \phi \cos \phi = -\sigma/2 \sin 2\phi.\end{aligned}\tag{87}$$

Здесь использована связь между напряжениями в декартовой и полярной системах координат:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \sin^2 \phi + 2\sigma_{xy} \sin \phi \cos \phi, \\ \sigma_\phi &= \sigma_x \sin^2 \phi + \sigma_y \cos^2 \phi - 2\sigma_{xy} \sin \phi \cos \phi, \\ \sigma_{r\phi} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \phi \cos \phi + \sigma_{xy}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi).\end{aligned}$$

Согласно (87), от напряжений σ_r и $\sigma_{r\phi}$ на внешней границе кругового кольца возникает такое распределение напряжений, которое может быть разделено на осесимметричную и неосесимметричную части. Таким образом, решение задачи Кирша получается путем наложения решения Ляме для кольца при растяжении его распределенной по внешней границе нагрузкой интенсивностью $\sigma/2$ и свободной от нагрузки внутренних границей и решения для кольца с напряжениями на внешней границе:

$$\sigma_r = \sigma/2 \cos 2\phi, \sigma_{r\phi} = -\sigma/2 \sin 2\phi.\tag{88}$$

Решение первой задачи дает формула

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{2} \frac{\sigma b^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2} \frac{\sigma a^2 b^2}{r^2(b^2 - a^2)}, \\ \sigma_\phi &= \frac{1}{2} \frac{\sigma b^2}{b^2 - a^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma a^2 b^2}{r^2(b^2 - a^2)}.\end{aligned}\quad (89)$$

Решение второй задачи будем искать, используя функцию напряжений Эри

$$F(r, \phi) = f(r) \cos 2\phi.$$

Из бигармонического уравнения $\triangle\triangle F = 0$ следует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + C/r^2 + D.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = \\ &= - \left(2B + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\phi, \\ \sigma_\phi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \left(2B + 12Ar^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\phi, \\ \sigma_{r\phi} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right) = \\ &= \left(2B + 6Ar^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \cos 2\phi.\end{aligned}\quad (90)$$

Используя граничные условия на свободной поверхности $\sigma_r = 0, \sigma_{r\phi} = 0$ при $r = a$, а также (88), после выполнения предельного перехода $b \rightarrow \infty$ получим

$$A = 0, B = -\sigma/4, C = -a^4\sigma/4, D = a^2\sigma/2.$$

Подставляя теперь значения постоянных в (90) и складывая с (89), окончательно получаем

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\phi \right],$$

$$\sigma_\phi = \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\phi \right],$$

$$\sigma_{r\phi} = -\frac{\sigma}{2} \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\phi.$$

На контуре отверстия $r = a$ для окружных напряжений справедливы равенства $\sigma_\phi = \sigma(1 - 2\cos 2\phi)$, где $(\sigma_\phi)_{\max} = 3\sigma$ для $\phi = \pm\pi/2$, $(\sigma_\phi)_{\min} = -\sigma$ для $\phi = 0$ и $\phi = \pi$. Видно, что напряжения на контуре отверстия повышаются и соответствующий коэффициент концентрации равен трем. Этот факт имеет большое практическое значение.

12. Приложение. Тензоры в ортонормированных системах координат

12.1. Преобразование ортонормированного базиса. Основная задача тензорного исчисления

Пусть в евклидовом пространстве R^3 имеются два ортонормированных базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}, \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3\}$ с началом в точке 0 (рис. 42). Разложим векторы второго базиса по векторам первого базиса. Имеем

$$\bar{s}_1 = \gamma_{11}\bar{e}_1 + \gamma_{12}\bar{e}_2 + \gamma_{13}\bar{e}_3,$$

$$\bar{s}_2 = \gamma_{21}\bar{e}_1 + \gamma_{22}\bar{e}_2 + \gamma_{23}\bar{e}_3,$$

$$\bar{s}_3 = \gamma_{31}\bar{e}_1 + \gamma_{32}\bar{e}_2 + \gamma_{33}\bar{e}_3.$$

Короче эти равенства можно записать так:

$$\bar{s}_i = \gamma_{ij}\bar{e}_j (\bar{s}_i = \gamma_{i\alpha}\bar{e}_\alpha) \quad (i, j, \alpha = 1, 2, 3). \quad (91)$$

Здесь использовано правило суммирования по повторяющемуся индексу (правило Эйнштейна). Неповторяющийся индекс называется свободным и в обеих частях равенства должен совпадать. Более двух раз индекс в одночлене встретиться не может (недопустимые нарушения: $a = b_{kkk}, c = f_i + q_k, a_{ij} = l_i\delta_{ij}$). Повторяющиеся индексы называются немymi индексами.

Умножим скалярно каждое из равенств (91) на каждый из векторов \bar{e}_k . Тогда, учитывая, что $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1, i = j; \delta_{ij} = 0, i \neq j$), получим

$$\bar{s}_i \cdot \bar{e}_k = \gamma_{ij}\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k = \gamma_{ij} = \bar{s}_i \cdot \bar{e}_j (k = j).$$

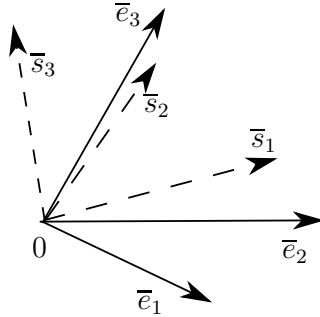


Рис. 42

Так как векторы \bar{s}_i и \bar{e}_j единичные, то

$$\bar{s}_i \cdot \bar{e}_j = \cos(\bar{s}_i, \bar{e}_j) = \gamma_{ij}.$$

С другой стороны, можно разложить векторы первого базиса по векторам второго. Получим

$$\bar{e}_i = \beta_{ij} \bar{s}_j$$

и далее

$$\bar{e}_i \cdot \bar{s}_j = \cos(\bar{e}_i, \bar{s}_j) = \beta_{ij}.$$

Отсюда

$$\gamma_{ij} = \beta_{ji}.$$

Числа γ_{ij} можно записать в виде квадратной таблицы (матрицы) третьего порядка

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей перехода от старого (первого) базиса к новому.

Аналогично матрица

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от нового базиса к старому. Очевидно, что $B = \Gamma^T$ и, кроме того, $B = \Gamma^{-1}$.

Матрицы Γ , которые обладают таким свойством ($\Gamma^T = \Gamma^{-1}$), называются ортогональными. Таким образом, переход от одного ортонормированного базиса к другому в R^3 задается ортогональной матрицей.

Всякая ортогональная матрица служит матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Определитель ортогональной матрицы равен единице. Действительно, строки определителя Γ составлены из координат векторов $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$ относительно базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, поэтому $\det \Gamma$ равен смешанному произведению векторов $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$, т. е. $\det \Gamma = (\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \cdot \bar{s}_3$. Абсолютная величина этого произведения равна единице, так как она равна объему куба, построенного на векторах $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$. Если $\det \Gamma = +1$, то базисы имеют одинаковую ориентацию (базис \bar{e}_i может быть совмещен с базисом \bar{s}_i путем поворота вокруг точки 0). Если $\det \Gamma = -1$, то базисы имеют противоположную ориентацию (одного поворота недостаточно, к нему следует добавить отражение базиса \bar{s}_i относительно некоторой плоскости, проходящей через точку 0).

Запишем для примера формулы преобразований ортонормированного базиса для плоскости. Это преобразование представляет собой чистый поворот на некоторый угол α вокруг начала координат 0 либо поворот на угол α с последующим отражением относительно некоторой прямой, проходящей через начало координат.

В первом случае (рис. 43):

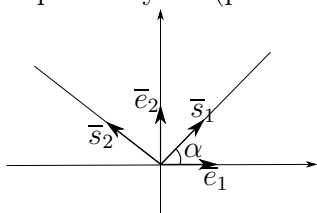


Рис. 43

$$\bar{s}_1 = \cos \alpha \bar{e}_1 + \sin \alpha \bar{e}_2,$$

$$\bar{s}_2 = -\sin \alpha \bar{e}_1 + \cos \alpha \bar{e}_2,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \Gamma = 1.$$

Во втором случае (рис. 44):

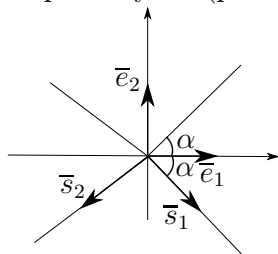


Рис. 44

$$\bar{s}_1 = \cos \alpha \bar{e}_1 - \sin \alpha \bar{e}_2,$$

$$\bar{s}_2 = -\sin \alpha \bar{e}_1 - \cos \alpha \bar{e}_2,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \Gamma = -1.$$

Пусть теперь в пространстве задан вектор \bar{x} . Он представляет собой некоторый физический или геометрический объект, заданный как по величине, так и по направлению. Этот реально существующий объект не зависит от того, в какой системе координат его рассматривать.

При применении координатного метода, который позволяет изучать геометрические объекты (образы) не непосредственно, а достаточно хорошо развитыми методами алгебры и анализа, мы с каждым вектором \bar{x} связываем его координаты x_1, x_2, x_3 , которые зависят уже не только от самого вектора, но и от рассматриваемой координатной системы (ортонормированного базиса). Такие базисы можно выбирать различным образом. Тем самым при применении координатного метода получаем данные, отража-

ющие не только геометрическую картину, но и произвол выбора координатной системы. Например, сами координаты вектора зависят от координатной системы, но сумма их квадратов (квадрат длины вектора) уже не должна зависеть от выбора системы координат.

Свойства геометрических или физических объектов, не зависящие от выбора системы координат, в которой эти объекты рассматриваются, называются их инвариантными свойствами. Только такие свойства в основном и представляют интерес для изучения.

Основная задача тензорного исчисления заключается в том, чтобы научиться отделять результаты, относящиеся к самим геометрическим объектам, от того, что привнесено случайным выбором координатной системы.

Для этой цели прежде всего выясним, как преобразуются координаты вектора \bar{x} при переходе от ортонормированного базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ с началом в точке 0 к другому базису $\{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3\}$ с тем же началом. Запишем разложение вектора \bar{x} в каждом из этих базисов:

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i, \bar{x} = y_i \bar{s}_i.$$

Поскольку это разложение одного и того же вектора, то можно приравнять правые части этих равенств:

$$x_i \bar{e}_i = y_i \bar{s}_i.$$

Но $\bar{e}_i = \beta_{ij} \bar{s}_j$. Тогда $x_k \beta_{ki} \bar{s}_i = y_i \bar{s}_i$. Отсюда, в силу линейной независимости векторов \bar{s}_i , следует

$$y_i = \beta_{ki} x_k = \gamma_{ik} x_k.$$

Это выражение новых координат вектора \bar{x} через старые. Аналогично получаем выражение старых координат через новые:

$$x_i = \beta_{ik} y_k.$$

Символы Леви–Чивита

Рассмотрим таблицу векторных произведений векторов ортонормированного базиса пространства R^3 . Эта таблица будет по-разному записываться для правого и левого базисов:

| | e_1 | e_2 | e_3 | | e_1 | e_2 | e_3 |
|---------------|--------|--------|--------|--------------|--------|--------|--------|
| e_1 | 0 | e_3 | $-e_2$ | e_1 | 0 | $-e_3$ | e_2 |
| e_2 | $-e_2$ | 0 | e_1 | e_2 | e_3 | 0 | $-e_1$ |
| e_3 | e_2 | $-e_1$ | 0 | e_3 | $-e_2$ | e_1 | 0 |
| правая тройка | | | | левая тройка | | | |

Здесь векторы, стоящие слева, считаются первыми, а векторы, стоящие сверху, — вторыми сомножителями векторного произведения ($\bar{e}_i \times \bar{e}_j$).

Чтобы записать векторное произведение базисных векторов в одной форме для любого ортонормированного базиса, введем величину ε , которая равна $+1$, если базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ правый, и -1 , если этот базис левый. Затем введем величины ε_{ijk} , определяемые равенствами

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = \varepsilon,$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -\varepsilon$$

и равными нулю, если какие-нибудь два из индексов i, j, k равны между собой. Здесь применена круговая перестановка индексов. Тогда $\bar{e}_i \times \bar{e}_j = \varepsilon_{ijk} \bar{e}_k$ при любой ориентации базиса.

12.2. Полинейные формы и тензоры

12.2.1. Линейные формы

Говорят, что в линейном пространстве R^3 задана скалярная функция векторного аргумента $\phi = \phi(\bar{x})$, если каждому вектору \bar{x} из R^3 поставлено в соответствие некоторое число ϕ . Эта функция называется линейной функцией или *линейной формой*, если она обладает следующими свойствами:

$$\phi(\bar{x} + \bar{y}) = \phi(\bar{x}) + \phi(\bar{y}), \quad \phi(\lambda\bar{x}) = \lambda\phi(\bar{x}).$$

Найдем теперь выражение линейной формы $\phi = \phi(\bar{x})$ в ортонормированном базисе \bar{e}_i . Так как $\bar{x} = x_i\bar{e}_i$ и функция ϕ линейна, то $\phi(\bar{x}) = \phi(x_i\bar{e}_i) = x_i\phi(\bar{e}_i)$. Или

$$\phi(\bar{x}) = a_i x_i, \quad \text{где числа } a_i = \phi(\bar{e}_i).$$

Это выражение представляет собой однородный многочлен первой степени от переменных x_i . Поэтому-то линейная функция и называется линейной формой. Коэффициенты a_i в этом выражении зависят от выбора базиса.

Посмотрим, как преобразуются коэффициенты линейной формы при переходе к новому базису \bar{s}_i . При таком преобразовании $\bar{s}_i = \gamma_{ij}\bar{e}_i$. Тогда в новом базисе $\phi = a'_i x'_i$, где $a'_i = \phi(\bar{s}_i) = \phi(\gamma_{ij}\bar{e}_j) = \gamma_{ij}\phi(\bar{e}_j) = \gamma_{ij}a_j$. То есть $a'_i = \gamma_{ij}a_j$. Таким образом, закон изменения коэффициентов линейной формы при переходе к новому базису совпадает с законом изменения координат вектора.

12.2.2. Билинейные формы

Скалярная функция двух векторных аргументов $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ называется *билинейной функцией* или билинейной формой, если

$$\phi(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = \phi(\bar{x}_1, \bar{y}) + \phi(\bar{x}_2, \bar{y}), \quad \phi(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \phi(\bar{x}, \bar{y}_1) + \phi(\bar{x}, \bar{y}_2), \phi(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda \phi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Найдем выражение билинейной формы $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y})$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Имеем

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i, y = y_j \bar{e}_j,$$

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = x_i y_j \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j).$$

Обозначая числовые коэффициенты $\phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_{ij}$, получаем

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = a_{ij} x_i y_j.$$

Коэффициенты a_{ij} билинейной формы могут быть записаны в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу будем называть матрицей билинейной формы ϕ . Таким образом, в пространстве R^3 билинейной форме соответствует в каждом базисе определенная матрица третьего порядка.

Посмотрим теперь, как преобразуются коэффициенты билинейной формы при преобразовании базиса. В новом базисе \bar{s}_i эта форма запишется в виде

$$\phi = a'_{ij} x'_i y'_j,$$

где $a'_{ij} = \phi(\bar{s}_i, \bar{s}_j)$. При переходе к новому базису $\bar{s}_i = \gamma_{ik} \bar{e}_k$. Тогда

$$a'_{ij} = \phi(\gamma_{ik} \bar{e}_k, \gamma_{jm} \bar{e}_m) = \gamma_{ik} \gamma_{jm} \phi(\bar{e}_k, \bar{e}_m) = \gamma_{ik} \gamma_{jm} a_{km}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами преобразования коэффициентов линейной формы, мы видим, что обе эти группы формул устроены аналогично.

12.2.3. Полилинейные формы

Рассмотрим теперь в R^3 полилинейную форму $\phi = \phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)$, т. е. такую, что для каждого векторного аргумента выполняются свойства аддитивности и однородности. Число аргументов p называется степенью полилинейной формы. Форма ϕ называется также p -формой. Рассмотренные ранее формы являются частным случаем полилинейной формы и являются формами первой и второй степени.

Теперь посмотрим, как запишется полилинейная форма в координатном виде. Для определенности рассмотрим трилинейную форму $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Обобщение на форму более высокой степени после этого не составляет труда. Имеем

$$\begin{aligned}\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \phi(x_i \bar{e}_i, y_j \bar{e}_j, z_k \bar{e}_k) = \\ &= x_i y_j z_k \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = a_{ijk} x_i y_j z_k.\end{aligned}$$

Таким образом, трилинейная форма записывается как однородный многочлен третьей степени, линейный относительно трех рядов переменных $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)$. Он содержит $3^3 = 27$ слагаемых и столько же коэффициентов a_{ijk} . Совокупность этих коэффициентов можно представить в виде кубической матрицы третьего порядка.

Аналогично для p -линейной формы

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \dots, \bar{w}) = a_{ijk\dots m} x_i y_j z_k \dots w_m,$$

где $a_{ijk\dots m} = \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k, \dots, \bar{e}_m)$ ($i, j, k, \dots, m = 1, 2, 3$). Коэффициенты $a_{ijk\dots m}$ этой формы имеют p индексов, каждый из которых может принимать три значения. Всего такая форма имеет 3^p коэффициентов. Например, четырехлинейная форма имеет $3^4 = 81$ коэффициентов a_{ijmn} .

Введенные полилинейные формы определены независимо от выбора системы координат. Значения этих форм зависят только от значений их векторных аргументов, но не зависят от того, в каком базисе рассматриваются эти вектора. Можно сказать, что полилинейные формы определены инвариантным способом. Так как при переходе к новому базису координаты векторов меняются, то меняются и коэффициенты полилинейных форм (поскольку сама форма должна оставаться инвариантной). Совокупность коэффициентов инвариантной полилинейной формы представляет собой важный геометрический объект.

Определение. Геометрический (или физический) объект, который определяется совокупностью коэффициентов $a_{ijk\dots m}$ полилинейной формы $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{w})$, записанной в некотором ортонормированном базисе, называется **тензором**. Сами числа $a_{ijk\dots m}$ называются компонентами или координатами этого тензора.

Так как далее никаких других тензоров, кроме ортогональных, рассматриваться не будет, то всюду их будем называть просто тензорами. Будем говорить, что тензор $a_{ijk\dots m}$ определяется линейной формой $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{w})$. Коэффициенты $a_{ijk\dots m}$ формы ϕ степени p имеют p индексов. Поэтому тензор, соответствующий полилинейной форме степени p , называется тензором *валентности p* или тензором p -го ранга.

При переходе к новому базису коэффициенты полилинейной формы изменяются совершенно определенным образом. Этот закон устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Для того чтобы совокупность величин $a_{ijk\dots m}$, зависящая от выбора базиса, была тензором, необходимо и достаточно, чтобы при переходе от ортонормированного базиса $\{\bar{e}_i\}$ к такому же базису $\{\bar{s}_i\}$ они изменялись по закону

$$a'_{ijk\dots m} = \gamma_{i\alpha}\gamma_{j\beta}\gamma_{k\gamma}\dots\gamma_{m\delta}a_{\alpha\beta\gamma\dots\delta}.$$

Примеры некоторых тензоров

1. Тензор нулевого ранга (скаляр). Скалярная величина не зависит от выбора базиса. Тензор нулевого ранга можно рассматривать как единственный коэффициент линейной формы нулевой степени. Тензор нулевого ранга инвариантен.

2. Совокупность коэффициентов a_i линейной формы $\phi = \phi(\bar{x})$ является тензором первого ранга (коэффициенты a_i составляют матрицу размерности 1×3 , т. е. вектор).

3. Совокупность коэффициентов a_{ij} билинейной формы $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y})$, образующая матрицу $A = (a_{ij})$, представляет тензор второго ранга. В частности, таким тензором будет совокупность символов Кронекера δ_{ij} , так как они являются коэффициентами билинейной формы $\phi = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Этот тензор называется единичным.

12.2.4. Изотропные тензоры и псевдотензоры

Изотропными тензорами называются те из них, элементы которых не меняются при преобразовании координат.

Скаляр есть изотропный тензор нулевого ранга.

Изотропных тензоров 1-го ранга с ненулевыми вещественными компонентами не существует.

Рассмотрим δ_{ij} как тензор второго ранга:

$$\delta'_{ij} = \gamma_{i\alpha} \gamma_{j\beta} \delta_{\alpha\beta} = \gamma_{i\alpha} \gamma_{j\alpha} = \delta_{ij}.$$

Отсюда δ_{ij} — изотропный тензор второго ранга.

Изотропных тензоров 4-го ранга существует три:

$$\text{а) } \delta_{ip} \delta_{kq}, \quad \text{б) } \delta_{ip} \delta_{kq} + \delta_{iq} \delta_{kp},$$

$$\text{в) } \delta_{ip}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{kp} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql}.$$

Можно построить изотропные тензоры более высоких порядков.

12.2.5. Симметричные и антисимметричные тензоры

Следующий важный класс тензоров — это симметричные и антисимметричные тензоры.

1. Пусть $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y})$ — билинейная форма. Эта форма называется *симметричной*, если

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(\bar{y}, \bar{x}) \forall \bar{x}, \bar{y}.$$

Тензор второго ранга, определяемый симметричной билинейной формой, называется *симметричным* тензором. Компоненты такого тензора в любом ортонормированном базисе образуют симметричную матрицу $a_{ij} = a_{ji}$. Это непосредственно вытекает из следующего равенства:

$$a_{ij} = \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \phi(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = a_{ji}.$$

Очевидно, что симметричный тензор второго ранга имеет шесть существенных компонент.

2. Билинейная форма $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y})$ называется *антисимметричной*, если

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = -\phi(\bar{y}, \bar{x}) \forall \bar{x}, \bar{y}.$$

Тензор второго ранга, определяемый этой формой, называется *антисимметричным* тензором. Так как $\phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) =$

$= -\phi(\bar{e}_j, \bar{e}_i)$, то $a_{ij} = -a_{ji}$. Эти коэффициенты образуют кососимметричную матрицу

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда кососимметричный тензор 2-го ранга имеет всего три существенных компоненты.

12.3. Тензорная алгебра

Сначала введем понятие нулевого тензора, выполняющего роль нуля в тензорной алгебре. Тензор называется *нулевым*, если определяющая его полилинейная форма $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{w})$ тождественно равна нулю. Все компоненты нулевого тензора равны нулю. Нулевой тензор любого ранга изотропен.

12.3.1. Равенство тензоров

Два тензора называются *равными*, если тождественно равны определяющие их полилинейные формы. Равные тензоры имеют один и тот же ранг и их соответствующие компоненты попарно равны в любой системе координат. В самом деле, тождество

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{w}) = \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{w})$$

в координатной форме может быть записано в виде

$$a_{ijk\dots m}x_iy_jz_k\dots w_m = b_{ijk\dots m}x_iy_jz_k\dots w_m,$$

откуда

$$a_{ijk\dots m} = b_{ijk\dots m}.$$

Равенство тензоров инвариантно относительно ортогональных преобразований.

12.3.2. Сложение (вычитание) тензоров

Пусть $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{w})$, $\psi = \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots, \bar{w})$ — две полилинейные формы одних и тех же векторных аргументов одной и той же степени p . Суммой тензоров $a_{ijk\dots m}$ и $b_{ijk\dots m}$ валентности p , определяемых полилинейными формами ϕ и ψ , назовем тензор $c_{ijk\dots m}$, определяемый формой $\phi + \psi$. Так как

$$\phi + \psi = (a_{ijk\dots m} + b_{ijk\dots m})x_i y_j z_k \dots w_m,$$

то компоненты тензора $c_{ijk\dots m}$ связаны с компонентами тензоров $a_{ijk\dots m}$, $b_{ijk\dots m}$ соотношениями

$$c_{ijk\dots m} = a_{ijk\dots m} + b_{ijk\dots m}.$$

12.3.3. Умножение тензора на действительное число

Произведение $\lambda\phi$ полилинейной формы степени p на действительное число λ снова есть полилинейная форма степени p . Произведением тензора $a_{ijk\dots m}$ валентности p , определяемого формой ϕ , на число λ называется тензор $b_{ijk\dots m}$ той же валентности, определяемый формой $\lambda\phi$. Так как

$$\lambda\phi = (\lambda a_{ijk\dots m})x_i y_j z_k \dots w_m,$$

то $b_{ijk\dots m} = \lambda a_{ijk\dots m}$.

Из сказанного выше следует, что совокупность полилинейных форм степени p , так же как и совокупность тензоров валентности p , образует линейное пространство. Размерность этого пространства равна 3^p . Такое пространство называют p -кратным тензорным произведением линейного пространства R^3 . Базисом этого пространства могут служить, например, 3^p p -линейных форм вида $\phi_{ijk\dots m} = x_i y_j z_k \dots w_m$.

12.3.4. Умножение тензоров (тензорное умножение)

Пусть ϕ и ψ — полилинейные формы соответственно степеней p и q от различных векторных аргументов. Тогда их произведение будет полилинейной формой степени $p+q$. Например, $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \psi(\bar{u}, \bar{v})$ — форма степени 5. Формы ϕ и ψ определяют тензоры соответственно ранга p и q . Назовем *произведением тензоров*, определяемых формами ϕ и ψ , тензор, определяемый их произведением $\phi \cdot \psi$. Так как $\phi \cdot \psi$ имеет степень $p+q$, то произведением тензоров валентности p и q является тензор валентности $p+q$. Например,

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = a_{ijk}x_i y_j z_k, \quad \psi(\bar{u}, \bar{v}) = b_{lm}u_l v_m,$$

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\psi(\bar{u}, \bar{v}) = (a_{ijk}b_{lm})x_i y_j z_k u_l v_m.$$

Отсюда тензор $a_{ijk}b_{lm}$ является произведением тензоров a_{ijk} и b_{lm} . Оно обозначается $a_{ijk} \otimes b_{lm}$ ($T_1 \otimes T_2$) (\otimes — знак тензорного произведения).

Таким образом, компоненты произведения двух тензоров представляют собой произведения каждой компоненты первого тензора на каждую компоненту второго тензора.

Значит, $a_{ijk} \otimes b_{lm}$ представляет собой любые пары из a_{ijk} и b_{lm} . Например, $a_{111}b_{11}, a_{111}b_{21}, a_{111}b_{12}, \dots$

Важным примером тензора второго ранга является диада $\bar{a} \otimes \bar{b}$, которая образует тензор второго ранга с компонентами $B_{ij} = a_i b_j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Отметим, что диада иногда обозначается $\bar{a}\bar{b}$. Произведение $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ называется базисной диадой.

12.3.5. Свертывание произведения тензоров

Рассмотрим два произвольных тензора a_{ijk} и b_{lm} ранга два и три. Образует их произведение $a_{ijk}b_{lm}$ — пятивалентный тензор и свернем его по индексам k и l . В результате получим тензор

$$a_{ijk}b_{km} = a_{ij1}b_{1m} + a_{ij2}b_{2m} + a_{ij3}b_{3m}$$

валентности три. Такая операция называется *свертыванием* тензоров.

Таким образом, операция свертывания двух тензоров представляет собой умножение и свертывание полученного в результате умножения тензора по индексам, принадлежащим разным сомножителям. В результате свертывания тензоров валентности p и q получается тензор ранга $p + q - 2$.

Особенно простой характер носит свертывание произвольного тензора с единичным тензором δ_{ij} . Например,

$$a_{ijk}\delta_{kl} = a_{ij1}\delta_{1l} + a_{ij2}\delta_{2l} + a_{ij3}\delta_{3l} = a_{ijl},$$

т. е. $k = l$.

Как видно, свертывание тензоров можно производить не только по одной паре индексов, но и по любому количеству r таких пар. В результате этого получается новый тензор, валентность которого на $2r$ единиц меньше суммы валентностей исходных тензоров.

Теорема (обратный тензорный признак). Пусть в каждом ортонормированном базисе задана совокупность 3^{p+q} чисел $a_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}$ такая, что при свертывании ее с произвольным тензором $t_{j_1\dots j_q}$ валентности q снова получается тензор валентности p . Тогда исходная система чисел является тензором валентности $p + q$.

12.3.6. Скалярное произведение тензоров

Рассмотрим сначала полиадное представление тензоров. Известно соотношение $\bar{x} = x_i \bar{e}_i$, связывающее вектор \bar{x} с его компонентами x_i и базисом \bar{e}_i . Установим аналогичное соотношение для тензоров любого ранга. Возьмем тензор второго ранга B . В каждом базисе \bar{e}_i имеем девять чисел B_{ij} и столько же базисных диад $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$:

$$\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \dots$$

Образует тензор $B_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$. Его компоненты

$$(B_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j)_{pq} = B_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = B_{pq}$$

(проверяется непосредственно) суть компоненты тензора B . При повороте базиса

$$\begin{aligned} B'_{ij} \bar{s}_i \otimes \bar{s}_j &= \gamma_{ip} \gamma_{jq} B_{pq} \gamma_{in} \bar{e}_n \otimes \gamma_{jm} \bar{e}_m = \\ &= \delta_{pn} \delta_{qm} B_{pq} \bar{e}_n \otimes \bar{e}_m = B_{pq} \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q. \end{aligned}$$

Таким образом, компоненты тензора $B_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ совпадают с компонентами тензора B , и это же представление сохраняется при повороте базиса. Следовательно, $B = B_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$. Это диадное представление тензора второго ранга.

Аналогичным образом можно разложить тензор любого более высокого ранга по соответствующим полиадам. Для тензора третьего ранга имеем

$$T = T_{ijm} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_m,$$

для тензора четвертого ранга

$$C = C_{ijmn} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n.$$

Далее рассмотрим некоторые правила выполнения тензорного и скалярного произведения векторов базиса. Имеем

$$(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot \bar{e}_k = \bar{e}_i \otimes (\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k) = \delta_{jk} \bar{e}_i,$$

$$\bar{e}_k \cdot (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) = (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) \otimes \bar{e}_j = \delta_{ki} \bar{e}_j,$$

тензорное и скалярное произведения можно менять местами (проверяется непосредственно);

$$(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot (\bar{e}_k \otimes \bar{e}_l) = \delta_{jk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_l,$$

$$(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot \cdot (\bar{e}_k \otimes \bar{e}_l) = \delta_{jk} \delta_{il},$$

также проверяется непосредственно (первое выражение — однократное скалярное произведение, второе — двойное скалярное произведение двух диадных базисов).

Теперь можем определить скалярное произведение тензоров следующим образом. Пусть A и B — тензора второго ранга: $A = A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$, $B = B_{mn} \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n$. Тогда

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot B_{mn} \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n = \\ &= A_{ij} B_{mn} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot (\bar{e}_m \otimes \bar{e}_n) = A_{ij} B_{mn} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_n \delta_{jm} = \\ &= A_{im} B_{mn} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_n \end{aligned}$$

является тензором второго ранга;

$$\begin{aligned} A \cdot \cdot B &= A_{ij} B_{mn} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \cdot \cdot (\bar{e}_m \otimes \bar{e}_n) = \\ &= A_{ij} B_{mn} \delta_{jm} \delta_{in} = A_{mn} B_{mn} \end{aligned}$$

будет скаляром.

Отметим, что их тензорное (диадное) произведение дает тензор четвертого ранга

$$AB = A_{ij} B_{mn} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n.$$

Пусть $C = C_{ijmn}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n$ — тензор четвертого ранга. Тогда

$$\begin{aligned} C \cdot \cdot B &= C_{ijmn}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n \cdot \cdot B_{kl}\bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = \\ &= C_{ijmn}B_{kl}\delta_{nk}\delta_{ml}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = C_{ijmn}B_{nm}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \end{aligned}$$

является тензором второго ранга.

Применяя данное правило, можно записать любые скалярные произведения тензоров.

Используя понятие скалярного произведения тензоров, определим единичные тензоры различных рангов.

Определение. Единичным тензором называется изотропный тензор, скалярное произведение (однократное или многократное) которого с тензором, обладающим определенными свойствами, не изменяет этого тензора.

Возьмем, например, изотропный тензор $\delta = \delta_{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$. Умножим его скалярно на произвольный тензор $T = T_{ijm\dots kl}\bar{e}_i \otimes \dots \otimes \bar{e}_l$. Имеем

$$\begin{aligned} T \cdot \delta &= T_{ijm\dots kl}\bar{e}_i \otimes \dots \otimes \bar{e}_l \cdot \delta_{pq}\bar{e}_p \otimes \bar{e}_q = \\ &= T_{ijm\dots kl}\bar{e}_i \otimes \dots \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_q \delta_{pq}\delta_{lp} = \\ &= T_{ijm\dots kl}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \dots \otimes \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l. \end{aligned}$$

То есть получили тот же тензор. Следовательно, тензор δ является единичным тензором относительно однократного скалярного произведения для любых произвольных тензоров.

Тензор $I_{klpq} = \frac{1}{2}(\delta_{kp}\delta_{lq} + \delta_{kq}\delta_{lp})$ является единичным тензором относительно двойного скалярного произведения для симметричных тензоров, ранг которых больше или равен двум. Убедимся в этом на примере симметричного тензора четвертого ранга. Имеем

$$C \cdot \cdot I =$$

$$\begin{aligned}
&= C_{ijmn} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_m \otimes \bar{e}_n \cdot \frac{1}{2} (\delta_{kp} \delta_{lq} + \delta_{kq} \delta_{lp}) \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l \otimes \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q = \\
&= C_{ijmn} \frac{1}{2} (\delta_{kp} \delta_{lq} + \delta_{kq} \delta_{lp}) \delta_{nk} \delta_{ml} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q = \\
&= \frac{1}{2} (C_{ijqp} + C_{ijpq}) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q.
\end{aligned}$$

Так как $C_{ijpq} = C_{ijqp}$, то

$$C \cdot \cdot I = C_{ijpq} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}_p \otimes \bar{e}_q = C.$$

12.3.7. Симметрирование и альтернирование тензоров

Пусть $\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y})$ — произвольная билинейная форма. Построим при ее помощи билинейные формы

$$\phi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} [\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \phi(\bar{y}, \bar{x})],$$

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2} [\phi(\bar{x}, \bar{y}) - \phi(\bar{y}, \bar{x})].$$

Легко видеть, что форма ϕ_1 будет симметричной, а форма ϕ_2 — антисимметричной. В самом деле,

$$\begin{aligned}
\phi_1(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{2} [\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \phi(\bar{y}, \bar{x})] = \\
&= \frac{1}{2} [\phi(\bar{y}, \bar{x}) + \phi(\bar{x}, \bar{y})] = \phi_1(\bar{y}, \bar{x}), \\
\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{2} [\phi(\bar{x}, \bar{y}) - \phi(\bar{y}, \bar{x})] = \\
&= -\frac{1}{2} [\phi(\bar{y}, \bar{x}) - \phi(\bar{x}, \bar{y})] = -\phi_2(\bar{y}, \bar{x}).
\end{aligned}$$

Эти операции называются симметрированием и альтернированием формы ϕ .

Таким образом, форма ϕ может быть представлена в виде суммы

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_1(\bar{x}, \bar{y}) + \phi_2(\bar{x}, \bar{y}).$$

Такое представление формы ϕ называется ее разложением на симметричную и антисимметричную части.

Рассмотрим теперь, как выразятся тензоры, определяемые формами ϕ_1 и ϕ_2 , через тензор, определяемый формой ϕ . Запишем форму ϕ в координатном виде:

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = a_{ij}x_iy_j.$$

Тогда

$$\phi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(a_{ij}x_iy_j + a_{ji}y_ix_j),$$

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(a_{ij}x_iy_j - a_{ji}y_ix_j).$$

Вторые слагаемые равны $a_{ji}x_iy_j$ после изменения обозначения индексов суммирования. Отсюда

$$\phi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})x_iy_j, \quad \phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})x_iy_j.$$

Тензор, определяемый формой ϕ_1 , будет симметричным $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, а тензор, определяемый формой ϕ_2 , — антисимметричным $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$. Эта операция называется симметрированием и альтернированием тензора a_{ij} . Очевидно, что $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, т. е. это разложение тензора второго ранга на симметричную и антисимметричную части. Запишем матрицу антисимметричной части тензора a_{ij} :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13}) & \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Здесь величины ω_i являются компонентами так называемого сопутствующего тензора a_{ij} вектора $\overline{\omega}$. Его компоненты выражаются формулой

$$\omega_r = \frac{1}{2} \varepsilon_{rst} a_{ts}.$$

Например, $\omega_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{1st} a_{ts} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{123} a_{32} + \varepsilon_{132} a_{23}) = \frac{1}{2} (a_{32} - a_{23})$. Обращение вектора $\overline{\omega}$ в ноль свидетельствует о симметричности тензора.

12.3.8. Разложение симметричного тензора на шаровой тензор и тензор-девиатор

Симметричный тензор второго ранга единственным образом может быть представлен в виде суммы

$$a_{ij} = d_{ij} + h_{ij},$$

где $h_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} a_{pp}$ — шаровой тензор ($a_{pp} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ — свертка тензора второй валентности), а $d_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} a_{pp}$ — тензор-девиатор. Компоненты тензора второго ранга h_{ij} , отличные от нуля, расположены на главной диагонали и равны $\frac{1}{3} (a_{11} + a_{22} + a_{33})$. Тензор девиатор обладает тем свойством, что его свертка (след тензора), определяемая суммой компонентов, стоящих на главной диагонали, равна нулю.

Отметим, что указанное разбиение инвариантно относительно ортогональных преобразований. Кроме того, двойное скалярное произведение любого шарового тензора с любым тензором-девиатором равно нулю.

Аналогично для симметричного тензора четвертого ранга справедливо разложение

$$C_{ijmn} = s_{ijmn} + t_{ijmn},$$

где $t_{ijmn} = \frac{1}{6}I_{ijmn}C_{ppqq}$ — шаровой тензор (C_{ppqq} — двойная свертка тензора четвертого ранга, т. е. скаляр), а $S_{ijmn} = (C_{ijmn} - \frac{1}{6}I_{ijmn}C_{ppqq})$ — тензор-девиатор. Непосредственно проверяется, что четырехкратное скалярное произведение любого шарового тензора на любой тензор-девиатор четвертого ранга равно нулю.

Из приведенных рассуждений следует, что разбиение тензора произвольной валентности зависит от существования соответствующего единичного тензора. В первом случае это единичный тензор второго ранга относительно однократного скалярного произведения. Во втором случае — это единичный тензор четвертого ранга относительно двойного скалярного произведения.

В связи с разбиением симметричных тензоров на шаровой тензор и тензор-девиатор рассмотрим представление тензора $I_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$ в виде суммы

$$I_{ijmn} = H_{ijmn} + V_{ijmn},$$

где $V_{ijmn} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}$, $H_{ijmn} = I_{ijmn} - V_{ijmn}$. Непосредственно проверяется, что $H \cdots V = 0$. Тензор H_{ijmn} обладает тем свойством, что его двойное скалярное произведение с произвольным тензором, ранг которого больше или равен двум, определяет девиатор данного произвольного тензора. Естественно, его двойное скалярное произведение с любым шаровым тензором дает ноль. Аналогично двойное скалярное произведение тензора V_{ijmn} с любым тензором определяет шаровой тензор данного произвольного тензо-

ра, а такое же произведение с любым тензором-девиатором дает ноль. Например,

$$I_{ijmn}a_{mn} = H_{ijmn}a_{mn} + V_{ijmn}a_{mn} = h_{ij} + d_{ij} = a_{ij}.$$

12.3.9. Обратный тензор

Тензор B называют *обратным тензором* к тензору T , если его скалярное произведение (однократное, двухкратное и т. д.) на T дает соответствующий единичный тензор. Он обозначается T^{-1} .

Например, пусть A — тензор второго ранга. Тогда обратный тензор определяет операция

$$A \cdot A^{-1} = A_{ij}A_{kl}^{-1} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — единичный тензор второго ранга. Пусть C — тензор четвертого ранга. Тогда обратный тензор определяет операция

$$C \cdot \cdot C^{-1} = C_{ij\alpha\beta}C_{\alpha\beta mn}^{-1} = I_{ijmn},$$

где I — единичный тензор четвертого ранга относительно двойного скалярного произведения.

Таким образом, обратный тензор имеет тот же ранг, что и тензор, к которому он обратен, кратность скалярного произведения должна быть такой, чтобы в результате получался тензор того же ранга, и результатом скалярного произведения должен быть единичный тензор соответствующего ранга.

12.3.10. Элементы тензорного анализа

Набла-оператор (оператор Гамильтона)

В скалярном поле, задаваемом функцией координат $\phi(x_1, x_2, x_3)$, определен вектор $grad\phi$ (градиент), проекции которого на оси ортогональной декартовой системы координат равны частным производным от скаляра ϕ по x_i :

$$grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \bar{e}_i.$$

Скалярное произведение $grad\phi$ на вектор $d\bar{r}$, определяющий взаимное расположение двух бесконечно близких точек M и M' с вектор-радиусами \bar{r} и $\bar{r} + d\bar{r}$, представляет скаляр

$$grad\phi \cdot d\bar{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \bar{e}_i \cdot \bar{e}_k dx_k = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i = d\phi,$$

и этим доказывается, что $grad\phi$ представляет вектор.

Операция вычисления градиента может быть записана с помощью символического вектора — набла-оператора Гамильтона:

$$\nabla = \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

так что $grad\phi = \nabla\phi$.

Проекции набла-оператора — операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}$ подчинены закону преобразования проекций вектора. Действительно, при повороте координатной системы имеем

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \alpha_{ki} \frac{\partial\phi}{\partial x'_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \alpha_{ki} \frac{\partial}{\partial x'_k}.$$

Известное правило дифференцирования произведения распространяется на набла-оператор:

$$\nabla\phi\psi = \psi \nabla\phi + \phi \nabla\psi.$$

Дифференциальные операции в векторном поле

Операции над двумя векторами сводятся к построениям их скалярного инварианта $\vec{a} \cdot \vec{b}$, вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ и тензора-диады $\vec{a} \otimes \vec{b}(\vec{a}\vec{b})$. В соответствии с этим простейшей дифференциальной операцией в векторном поле служит образование скалярного произведения набла-оператора на вектор:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot a_k \vec{e}_k = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{a}.$$

Этот скаляр называется дивергенцией вектора.

Следующий шаг — образование вектора:

$$\nabla \times \vec{a} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times a_k \vec{e}_k = \varepsilon_{rik} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \vec{e}_r = \text{rot} \vec{a},$$

называемого ротором (вихрем) вектора.

Наконец, образование диады приводит к тензору второго ранга:

$$\nabla \vec{a} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_k a_k = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \text{grad} \vec{a},$$

градиенту вектора. Транспонированный тензор

$$(\nabla \vec{a})^T = \vec{e}_k \vec{e}_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

имеет матрицу компонент

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Произведение справа этого тензора на вектор $d\vec{r}$ приводит к вектору $d\vec{a}$:

$$(\nabla\vec{a})^T \cdot d\vec{r} = \bar{e}_k \bar{e}_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \cdot \bar{e}_q dx_q = \bar{e}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i} dx_i = \bar{e}_k da_k = d\vec{a}.$$

Основываясь на этом равенстве, естественно называть тензор $(\nabla\vec{a})^T$ производной вектора \vec{a} по радиус-вектору \vec{r} и принять обозначение

$$(\nabla\vec{a})^T = \frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}.$$

Выделяя из тензора $(\nabla\vec{a})^T$ его симметричную часть, получаем тензор

$$\frac{1}{2} [(\nabla\vec{a})^T + \nabla\vec{a}] = def\vec{a} = \frac{1}{2} \bar{e}_k \bar{e}_i \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right),$$

называемый деформацией вектора \vec{a} . Соответствующий тензору $(\nabla\vec{a})^T$ вектор $\vec{\omega}$ определяется равенством

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{rit} \frac{\partial a_t}{\partial x_i} \bar{e}_r = \frac{1}{2} \bar{e}_i \times \bar{e}_t \frac{\partial a_t}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \bar{e}_t a_t = \\ &= \frac{1}{2} \nabla \times \vec{a} = \frac{1}{2} rot\vec{a}. \end{aligned}$$

Обозначая через Ω кососимметричную часть тензора $(\nabla\vec{a})^T$, имеем

$$(\nabla\vec{a})^T = def\vec{a} + \Omega, \quad \nabla\vec{a} = def\vec{a} - \Omega, \quad (\nabla\vec{a})^T = \nabla\vec{a} + 2\Omega,$$

причем

$$\Omega = \frac{1}{2} \bar{e}_k \bar{e}_i \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right), \quad \Omega_{ki} = \varepsilon_{rik} \omega_r.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= (\nabla\vec{a})^T \cdot d\vec{r} = d\vec{r} \cdot \nabla\vec{a} = def\vec{a} \cdot d\vec{r} + \Omega \cdot d\vec{r} = \\ &= def\vec{a} \cdot d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}. \end{aligned}$$

Список используемой литературы

Александров А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М. : Высш. шк., 1990.

Александров А. Я. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного) / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев. М. : Наука, 1978.

Александров В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. М. : Наука, 1986.

Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности / Н. И. Безухов. М. : ГИТТЛ, 1953.

Блох В. И. Теория упругости / В. И. Блох. Харьков : ХГУ, 1964.

Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. 2-е изд. / А. С. Вольмир. М. : Наука, 1967.

Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды / Ю. И. Димитриенко. М. : Физматлит, 2010.

Дудяк А. И. Прикладная теория упругости / А. И. Дудяк, Т. А. Сахнович. М. : Изд-во Гревцова, 2010.

Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред / А. Зоммерфельд. М. : ИЛ, 1954.

Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. М. : Наука, 1970.

Кац А. М. Теория упругости / А. М. Кац. СПб. : Лань, 2002.

Койтер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред / В. Т. Койтер. М. : ИЛ, 1961.

Колтунов А. М. Прикладная механика деформируемого твердого тела / А. М. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. М. : Высш. шк., 1983.

Ландау Л. Д. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М. : Наука, 1987.

Лурье А.И. Теория упругости / А. И. Лурье. М. : Наука, 1980.

Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Ч. 2 : Классические модели механики сплошных сред / Л.В. Овсянников. Новосибирск : НГУ, 1977.

Планк М. Введение в теоретическую физику. Ч. 2 : Механика деформируемых тел. 2-е изд. / М. Планк. М. ; Л. : ГТТИ, 1932.

Победря Б.Е. Основы механики сплошной среды / Б.Е. Победря, Д.В. Георгиевский. М. : Физматлит, 2006.

Прагер В. Введение в механику сплошных сред / В. Прагер. М. : ИЛ, 1963.

Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. М. : Наука, 1983.

Сапунов В.Т. Прикладная теория упругости : в 2 ч. / В.Т. Сапунов. М. : Изд-во МИФИ, 2008.

Снеддон И.Н. Классическая теория упругости / И.Н. Снеддон, Д.С. Берри. М. : ГИФМЛ, 1961.

Сокольников И.С. Тензорный анализ: Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред / И.С. Сокольников. М. : КомКнига, 2010.

Тимошенко С.П. Прикладная теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Лессельс. М. : Госнаучтехиздат, 1931.

Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М. : Наука, 1979.

Треффц Е. Математическая теория упругости / Е. Треффц. Л. ; М. : Гос. тех.-теор. издат., 1934.

Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. М. : Мир, 1975.

Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. Л.: Наука, 1968.

Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан. М. : Мир, 1988.

Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К.Ф. Черных. Л. : Машиностроение, 1986.

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 3 |
| 1. Основные понятия | 4 |
| 1.1. Предмет механики деформируемого твердого тела | 4 |
| 1.2. Основные гипотезы и принципы механики деформируемого твердого тела | 6 |
| 1.3. Различные ветви механики деформируемого твердого тела | 10 |
| 2. Одномерные механико-математические модели материалов | 16 |
| 2.1. Растяжение и сжатие стержней | 16 |
| 2.2. Напряжения и деформации при растяжении–сжатии | 19 |
| 2.3. Большая деформация | 24 |
| 2.4. Неустойчивость растяжения при большой деформации | 25 |
| 2.5. Одномерные модели | 28 |
| 3. Расчет на прочность | 39 |
| 4. Основные понятия теории упругости | 44 |
| 4.1. Упругая энергия и упругие потенциалы . . . | 44 |
| 4.2. Термодинамика упругой деформации . . . | 48 |
| 4.3. Общие свойства упругих и пластических стержневых систем | 50 |
| 4.4. Линейные упругие системы | 54 |
| 4.5. Статически неопределимые системы. Экстремальные принципы | 56 |
| 4.6. Устойчивость пологой арки | 59 |

| | |
|---|---------------|
| 5. Теория напряжений | 63 |
| 5.1. Принцип напряжений | 63 |
| 5.2. Тензор напряжений | 64 |
| 5.2.1. Нормальные и касательные напряжения | 64 |
| 5.2.2. Напряженное состояние в точке | 65 |
| 5.2.3. Преобразование компонент тензора на- пряжений. Инварианты тензора на- пряжений | 68 |
| 5.2.4. Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и тензор-девиатор . | 69 |
| 5.2.5. Напряжения на наклонных площад- ках. Условия равновесия на границе | 71 |
| 5.2.6. Уравнения равновесия в напряжениях | 73 |
| 5.3. Исследование напряженного состояния в точ- ке тела | 76 |
| 5.3.1. Главные напряжения | 76 |
| 5.3.2. Максимальные (главные) касательные напряжения | 79 |
| 5.3.3. Октаэдрические напряжения | 82 |
| 6. Теория деформаций | 84 |
| 6.1. Понятие деформации | 84 |
| 6.2. Вектор перемещений | 85 |
| 6.3. Тензор деформации | 88 |
| 6.4. Представление нелинейного тензора дефор- мации через линейный тензор деформации и тензор малого поворота | 91 |
| 6.5. Тензор малой деформации | 93 |
| 6.6. Геометрический смысл компонент тензора малой деформации | 94 |
| 6.7. Уравнения совместности деформаций | 95 |
| 6.8. Деформированное состояние в точке тела . . | 98 |

| | |
|--|------------|
| 6.8.1. Главные деформации и инварианты тензора деформации | 98 |
| 6.8.2. Максимальный сдвиг, октаэдрические деформации, интенсивность деформации | 99 |
| 6.8.3. Шаровой тензор и девиатор деформации | 100 |
| 7. Определяющие соотношения теории упругости | 101 |
| 7.1. Обобщенный закон Гука | 101 |
| 7.2. Закон Гука для изотропного материала . . . | 109 |
| 7.3. Положительная определенность изотропного тензора модулей упругости | 115 |
| 7.4. Изометрия | 116 |
| 8. Основные уравнения теории упругости | 118 |
| 8.1. Краевые (граничные) задачи | 118 |
| 8.2. Краевые задачи в перемещениях и напряжениях | 120 |
| 8.3. Формулировка основных уравнений в криволинейных координатах | 124 |
| 8.3.1. Цилиндрические координаты | 124 |
| 8.3.2. Сферические координаты | 126 |
| 8.4. Прямая и обратная задачи теории упругости | 128 |
| 8.5. Полуобратный метод Сен-Венана | 129 |
| 8.6. Метод суперпозиции | 130 |
| 8.7. Общие теоремы | 130 |
| 8.7.1. Теорема Клапейрона | 130 |
| 8.7.2. Теорема взаимности Бетти | 131 |
| 8.7.3. Теорема о единственности решения . . | 133 |
| 9. Энергетические принципы теории упругости | 135 |
| 9.1. Возможные перемещения, возможная работа | 135 |

| | |
|--|------------|
| 9.2. Принцип возможных перемещений Лагранжа | 137 |
| 9.3. Принцип возможных сил (принцип возможной дополнительной работы) | 139 |
| 9.4. Значение принципа возможной работы | 141 |
| 9.5. Принцип стационарности потенциальной энергии | 142 |
| 9.6. Принцип стационарности дополнительной энергии | 144 |
| 10. Общие методы решения основных уравнений теории упругости | 147 |
| 10.1. Представление решения в форме Попковича–Нейбера | 147 |
| 10.2. Принцип напряжений | 149 |
| 10.2.1. Функции напряжений Максвелла . . | 149 |
| 10.2.2. Функции напряжений Мореры | 151 |
| 10.3. Метод Ритца | 151 |
| 11. Плоская задача теории упругости | 155 |
| 11.1. Плоское деформированное состояние | 155 |
| 11.2. Плоское напряженное состояние | 157 |
| 11.3. Основные соотношения плоской задачи в полярных координатах | 158 |
| 11.4. Функция напряжений Эри | 160 |
| 11.5. Осесимметричная задача | 161 |
| 11.6. Осесимметричное нагружение кругового кольца и толстостенной трубы (задача Ляме) | 161 |
| 11.7. Напряжения в составной трубе | 163 |
| 11.8. Концентрация напряжений на отверстии круговой формы в пластине, растягиваемой в одном направлении (задача Кирша) | 166 |

| | |
|---|------------|
| 12. Приложение. Тензоры в ортонормированных системах координат | 170 |
| 12.1. Преобразование ортонормированного базиса. Основная задача тензорного исчисления | 170 |
| 12.2. Полилинейные формы и тензоры | 176 |
| 12.2.1. Линейные формы | 176 |
| 12.2.2. Билинейные формы | 176 |
| 12.2.3. Полилинейные формы | 178 |
| 12.2.4. Изотропные тензоры и псевдотензоры | 180 |
| 12.2.5. Симметричные и антисимметричные тензоры | 181 |
| 12.3. Тензорная алгебра | 182 |
| 12.3.1. Равенство тензоров | 182 |
| 12.3.2. Сложение (вычитание) тензоров . . . | 183 |
| 12.3.3. Умножение тензора на действительное число | 183 |
| 12.3.4. Умножение тензоров (тензорное умножение) | 184 |
| 12.3.5. Свертывание произведения тензоров | 185 |
| 12.3.6. Скалярное произведение тензоров . . | 186 |
| 12.3.7. Симметрирование и альтернирование тензоров | 189 |
| 12.3.8. Разложение симметричного тензора на шаровой тензор и тензор-девиатор | 191 |
| 12.3.9. Обратный тензор | 193 |
| 12.3.10. Элементы тензорного анализа . . . | 194 |
| Список используемой литературы | 197 |

Учебное издание

Стружанов Валерий Владимирович
Бурмашева Наталья Владимировна

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ: ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Заведующий редакцией М. А. Овечкина
Редактор Н. В. Чапаева
Корректор Н. В. Чапаева
Компьютерная верстка Н. В. Бурмашевой

Подписано в печать 21.03.2019 г. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 11,85.

Уч.-изд. л. 8,2. Тираж 40 экз. Заказ 29.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Тел.: + 7(343) 389-94-79, 350-43-28

E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Тел.: + 7(343) 358-93-06, 350-90-13

Факс: +7 (343) 358-93-06

<http://print.urfu.ru>

